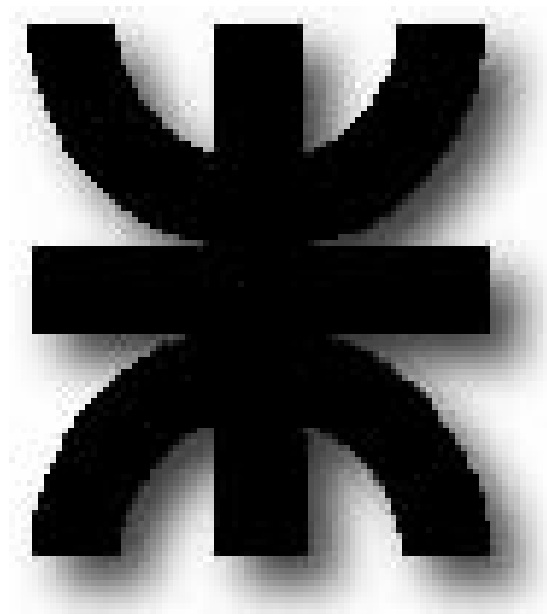


***U.TN. FAC. REG. HAEDO***



***Curso Introductorio 2006***

***FÍSICA - VECTORES***

***Lic. Ricardo Cruz***

## ÍNDICE:

Antes de empezar a estudiar.....	2
Objetivos.....	2
Esquema general.....	3
¿Qué es un vector?.....	4
Algunos ejemplos.....	6
Tipos de vectores.....	9
Operaciones con vectores: suma.....	9
Regla del paralelogramo.....	10
Regla del polígono.....	11
Un caso particular: vectores colineales.....	11
A modo de práctica: ejercicios.....	12
Resta de vectores.....	13
Producto de vectores.....	15
Producto de un vector por un escalar.....	15
Vectores de módulo 1: versores.....	15
Producto escalar.....	16
Producto vectorial.....	17
Componentes de un vector: Proyección de un vector sobre un eje.....	18
Proyección de un vector sobre dos ejes ortogonales.....	18
Componentes vectoriales.....	19
Componentes en tres dimensiones.....	20
Suma – resta analítica de vectores.....	20
Más ejemplos.....	21
Algunos ejercicios para hacer.....	23
Producto de vectores expresados mediante componentes cartesianas.....	24
Algunos ejercicios para hacer.....	25
Resumen.....	28
Apéndice 1: escalas.....	30
Apéndice 2: cómo referir ángulos al semieje positivo de las x.....	36
Autoevaluación.....	37
Zona de respuestas.....	43
Glosario.....	44
Bibliografía.....	45

## ANTES DE EMPEZAR A ESTUDIAR:

El módulo que acompaña a estas recomendaciones contiene conceptos fundamentales de una herramienta matemática muy usada en la física: los vectores. Está pensado para que personas que ya hayan visto algo del tema en su escolarización media puedan refrescar sus conocimientos, tapar algunos baches y ganar o en algunos casos recuperar, habilidades en el uso de los vectores y sus operaciones para la resolución de problemas.

Verá que los temas se encuentran desarrollados según un orden de dificultad creciente; y se acompañan los conceptos teóricos con ejemplos resueltos y algunos problemas para hacer. Se recomienda que se avance de a poco en el apunte; no se trata de hacerlo rápido sino de hacerlo bien. Algunas ideas a tener en cuenta a lo mejor facilitan el aprendizaje. Estas son:

1. Haga una lectura rápida del tema (por ejemplo, suma de vectores) como para enterarse de qué se trata. No importa si algunos conceptos no los comprende bien o quedan cosas descolgadas; el propósito es tomar un primer contacto con el material.
2. Proceda ahora a una lectura detallada del tema, subraye aquellas cosas que le parezcan importantes, tome notas aparte incluso de las dudas que le vayan surgiendo. Al final del módulo existe una lista de bibliografía que desarrolla los conceptos, y algunos sitios de Internet referidos al tema a los cuales puede recurrir. No dude en servirse de esto para profundizar.
3. Analice los ejemplos desarrollados; intente replantear los mismos ejercicios y compare con la resolución presente en el módulo. Tomando como estos como guía, intente plantear los ejercicios y problemas propuestos. Notará que las respuestas de los mismos se encuentran a continuación del desarrollo. Anote en todo momento las preguntas que puedan surgir de la resolución para consultar con su tutor.
4. Tanto para la teoría como para la ejercitación, encontrará a lo largo del módulo algunas "ayuditas", se recomienda su atenta lectura.
5. En el desarrollo del módulo también se encuentran insertas algunas preguntas; intente contestarlas. Las respuestas a las mismas las encontrará al final, en la llamada "zona de respuestas".

Al final del módulo encontrará una autoevaluación del tipo de respuesta múltiple. Una vez que complete el estudio de todo el módulo, intente responderla. Las respuestas se encuentran al final, "zona de respuestas". La autoevaluación le ayudará a saber en qué condiciones se encuentra en cuanto a lo aprendido.

Puede suceder que algunos conceptos matemáticos se le hayan olvidado. Hacia el final del módulo hay dos apuntes referidos, uno de ellos a la construcción de dibujos y gráficos escala, y el otro sobre referencias de ángulos al primer cuadrante. Hay links dentro del texto que lo llevan directamente a ellos. No dude en consultarlos.

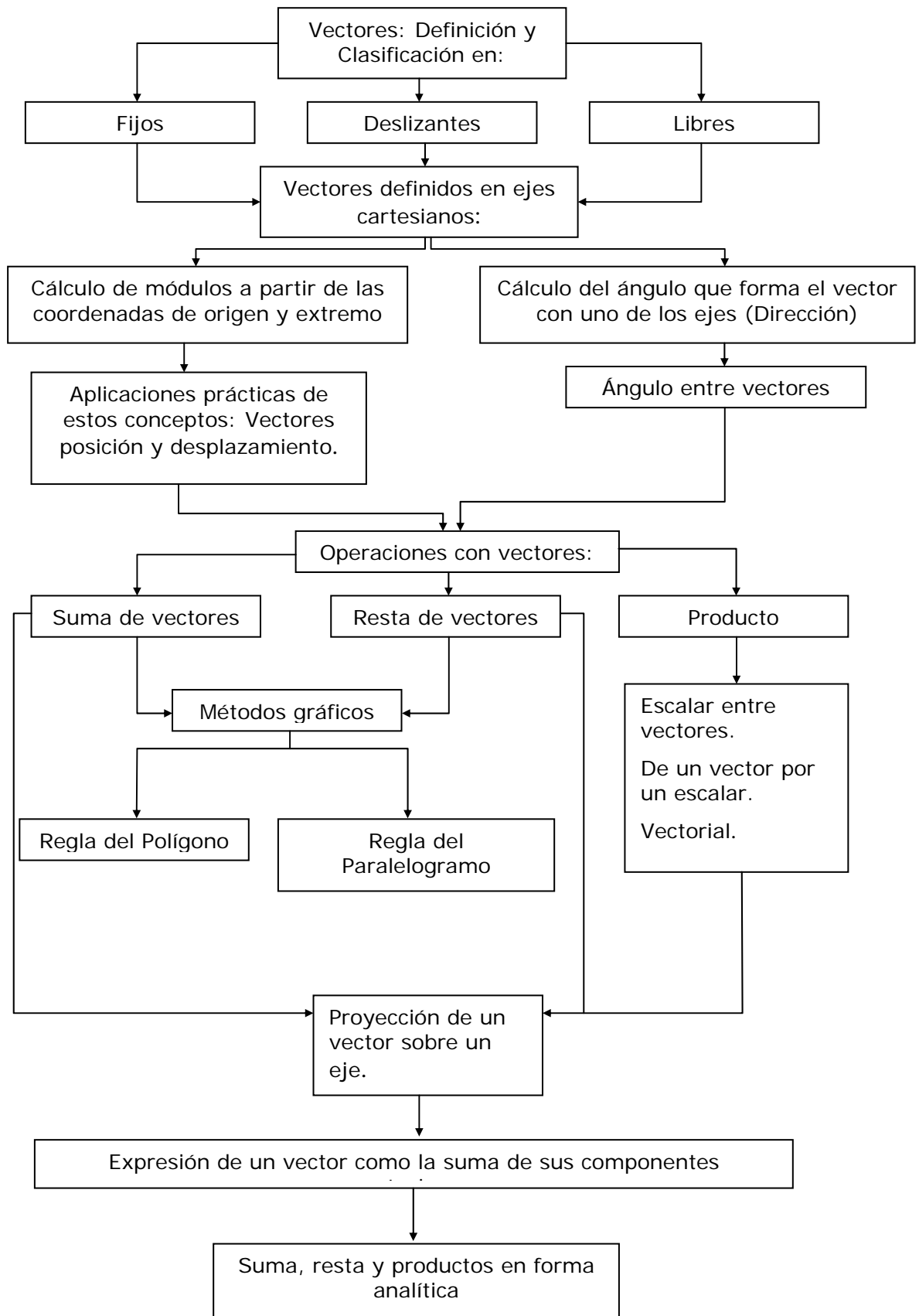
No dude en consultar todas las dudas que se le aparezcan con su tutor.

Dicho esto; ¡Manos a la obra! (o mejor dicho, ¡a los vectores!).

## OBJETIVOS:

- a. Incorporar conceptos matemáticos básicos para el desarrollo de temas de la física.
- b. Utilizar vectores para la resolución de problemas y ejercicios relacionados con la física.
- c. Introducir al alumno en el manejo de conceptos básicos sobre vectores y sus operaciones.
- d. Comprender y utilizar las propiedades de las operaciones con vectores para la resolución de diversas situaciones problemáticas.
- e. Desarrollar habilidades para la realización de esquemas y gráficos vinculados con magnitudes vectoriales.
- f. Incorporar en el alumno el hábito de la utilización de sistemas de referencia.
- g. Iniciar al alumno en la utilización de proyecciones de vectores sobre los ejes cartesianos para la resolución de diversos problemas vinculados con la física.
- h. Desarrollar habilidades en la operatoria con vectores y sus aplicaciones a la física.

## Esquema general.



# CAPÍTULO I:

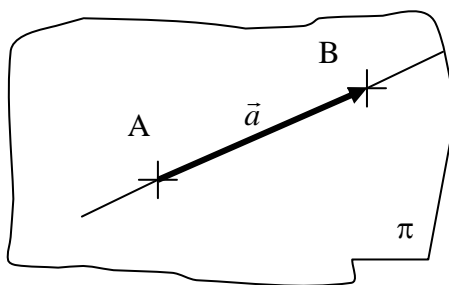
## VECTORES.

### ¿Qué es un vector?:

Si sobre un plano geométrico definimos un par de puntos, nos queda determinada una recta que está incluida en él.

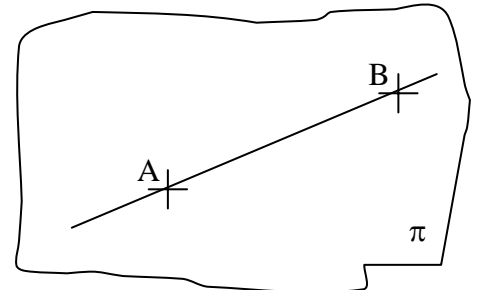
Si consideramos esos puntos como un par ordenado, tendremos definido un **vector**.

Un vector es, entonces, un par ordenado de puntos (A;B) cualesquiera, que en forma gráfica se representa mediante una **flecha**. El primer valor del par se llama

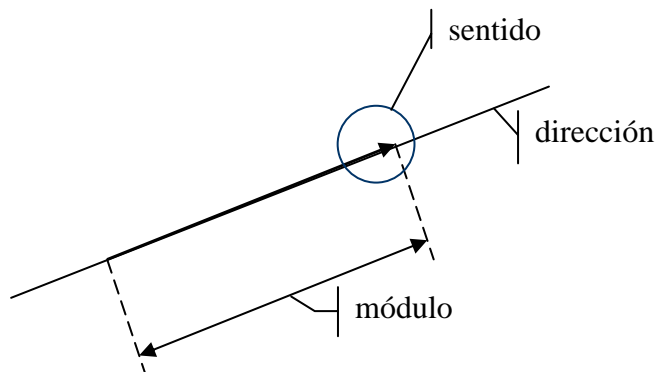


*origen* del vector, mientras que el segundo se denomina *extremo*. La notación más

frecuentemente usada para nombrarlo es  $\overrightarrow{AB}$  y se lee "vector AB". Otra manera más cómoda es asignarle una letra, con lo cual podemos representar al  $\overrightarrow{AB}$  como  $\vec{a}$ . Podemos distinguir en todo vector, tres elementos que lo caracterizan: la **dirección**, el **sentido** y el **módulo o intensidad**.



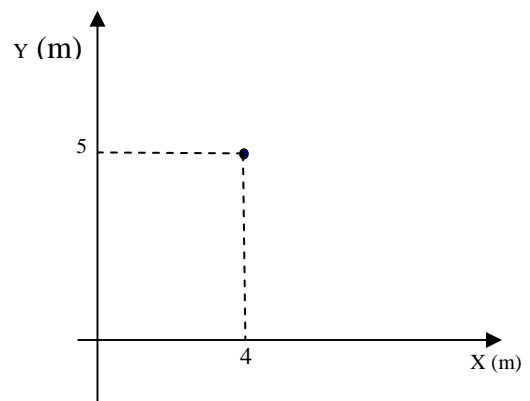
**a-**El **módulo**, se encuentra definido por la longitud, dibujada a escala conveniente, del segmento determinado por el origen y el extremo del vector (en este caso, A y B). En el caso particular de un vector de *módulo cero*, es decir, aquellos donde origen y extremo coinciden, se denomina **vector nulo**. Cuando nos referimos al módulo, escribimos la grafía que representa al vector encerrada entre barras por Ej.:  $|\vec{a}|$ , o bien la letra que lo nombra sin la flecha (p. Ej. : **a**).



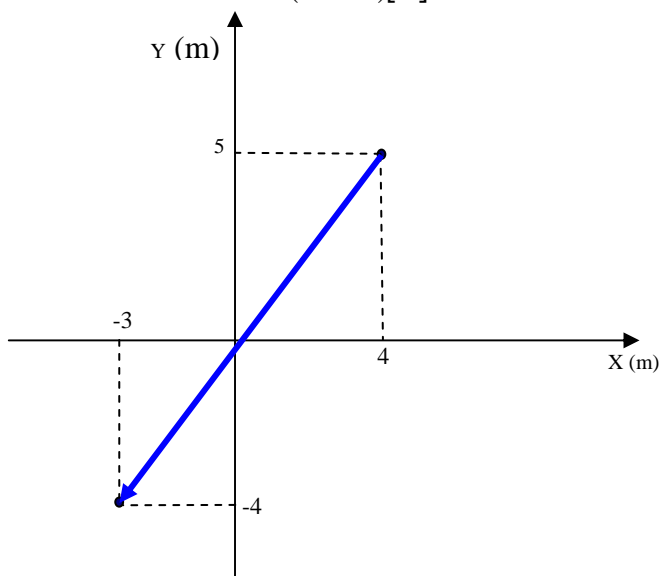
**b-**La **dirección** está determinada por la recta que contiene al vector (llamada también *sostén* del vector). Dos vectores que tienen el mismo sostén se llaman *colineales*.

**c-**El **sentido** está definido por la flecha.

Si para definir un vector necesitamos fijar un origen y un extremo, la cuestión ahora es cómo localizar ambos puntos en el plano o en el espacio. La forma correcta de hacerlo es recurriendo a un sistema de referencia. Si necesito ubicar los puntos en el plano, el sistema estará constituido por dos ejes cartesianos ortogonales. Ubicarlos en el espacio, requerirá una terna. Tomemos por ejemplo la localización del punto **A**. En el plano serán como muestra el esquema de la derecha. La posición de **A** estará definida entonces por:  $A = (4;5)[m]$



Para un vector, debemos dar la localización de dos puntos: el origen y el extremo. Supongamos que nuestro **A** sea el origen, y que en **B** se encuentre el extremo, siendo las coordenadas de  $B = (-3; -4)[m]$ . Representando esto resulta:



módulo de  $\vec{F}$  constituye la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde cada cateto puede calcularse en función de las coordenadas de los puntos **O** y **P**. Aplicando el teorema de Pitágoras, el módulo del vector puede calcularse como:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mientras que el ángulo puede encontrarse aplicando conceptos elementales de trigonometría. En este caso, la tangente del ángulo que forma la dirección del vector con el

semieje positivo de las x se puede encontrar como:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Veamos un ejemplo numérico: El vector  $\vec{OP}$  se encuentra definido por los puntos:  $O = (-3; 4)$  y  $P = (5; 2)$ . Si hacemos la construcción gráfica nos encontraremos con que el vector es el que se muestra en el esquema. Calcular su módulo implicará hacer:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (2 - 4)^2}$$

De donde:  $|\vec{F}| = 8,25 u$

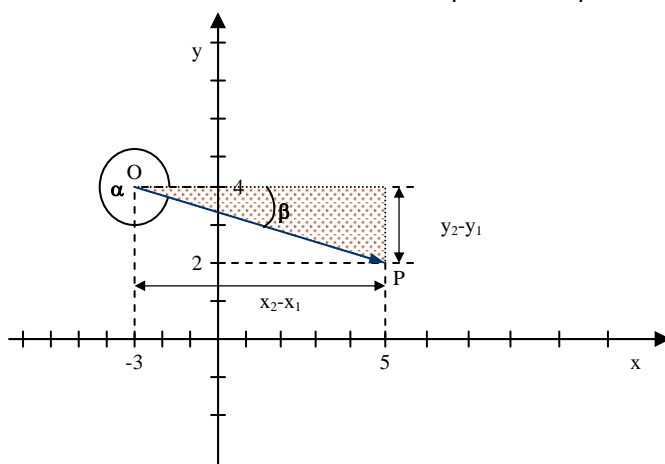
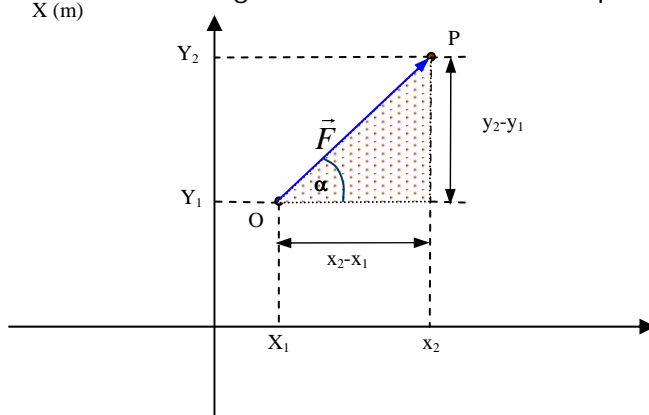
El ángulo que forma el vector con el semieje positivo de las x es  $\alpha$ , pero el cálculo nos permite obtener  $\beta$ .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 - 4}{5 - (-3)} = -0,25 \text{ de donde } \beta = -14,033^\circ \text{ ó } \beta = -14^\circ 2'$$

¿Cómo obtener  $\alpha$ ? Si observamos el esquema,  $\alpha = 360^\circ - \beta$ , o sea:  $\alpha = 345^\circ 58'$ ..

A partir de esta construcción podemos calcular en forma bastante sencilla el módulo del vector y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x (si tiene dificultades, consulte el [apéndice 2](#)).

Tomemos un caso más general: El vector  $\vec{F}$  está definido por los puntos:  $O = (x_1; y_1)$ , y  $P = (x_2; y_2)$ , ambos pertenecientes al primer cuadrante: En la figura se ve claramente que el

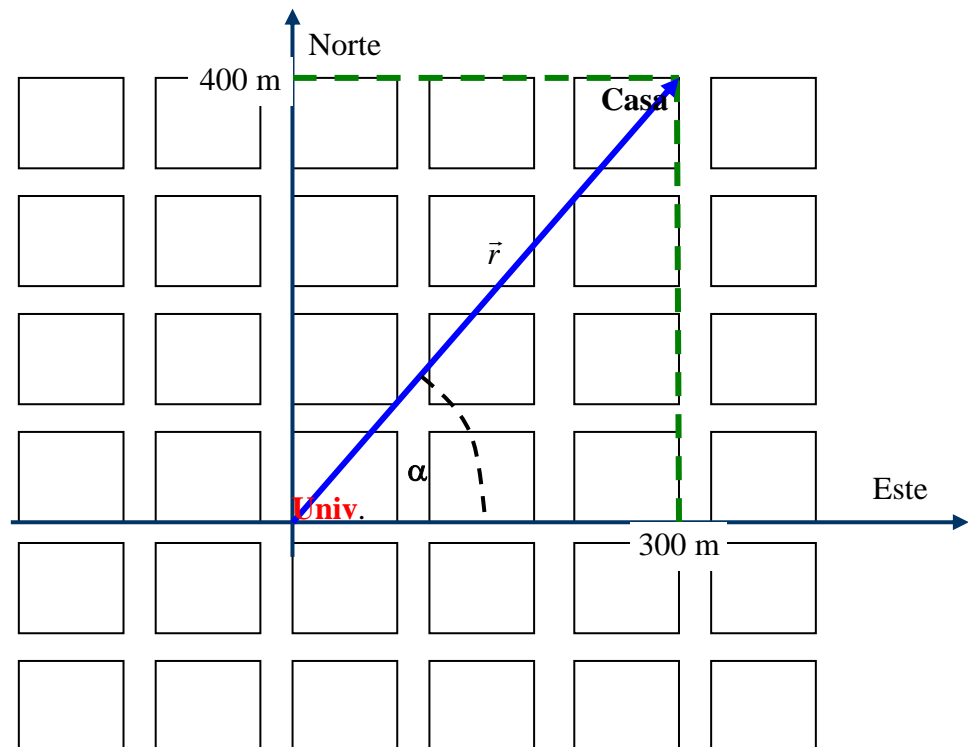


Podemos definir al vector  $\vec{F}$  como:  $\vec{F} \equiv (8,25 u ; 345^\circ 58')$

### Algunos ejemplos:

1- Julián vive a cuatro cuadras al norte del edificio de la Universidad, y a tres cuadras al este. ¿Podría indicar cuál es el vector posición de la casa de Julián, referido al edificio de la Universidad? (considere cada cuadra de 100 m de longitud, y desprecie el ancho de las calles)

Haciendo un plano:



Es evidente que las coordenadas del origen del vector posición son cero, por lo que para calcular su módulo sólo necesitamos las correspondientes al extremo.

El módulo de  $\vec{r}$  es, entonces:  $|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

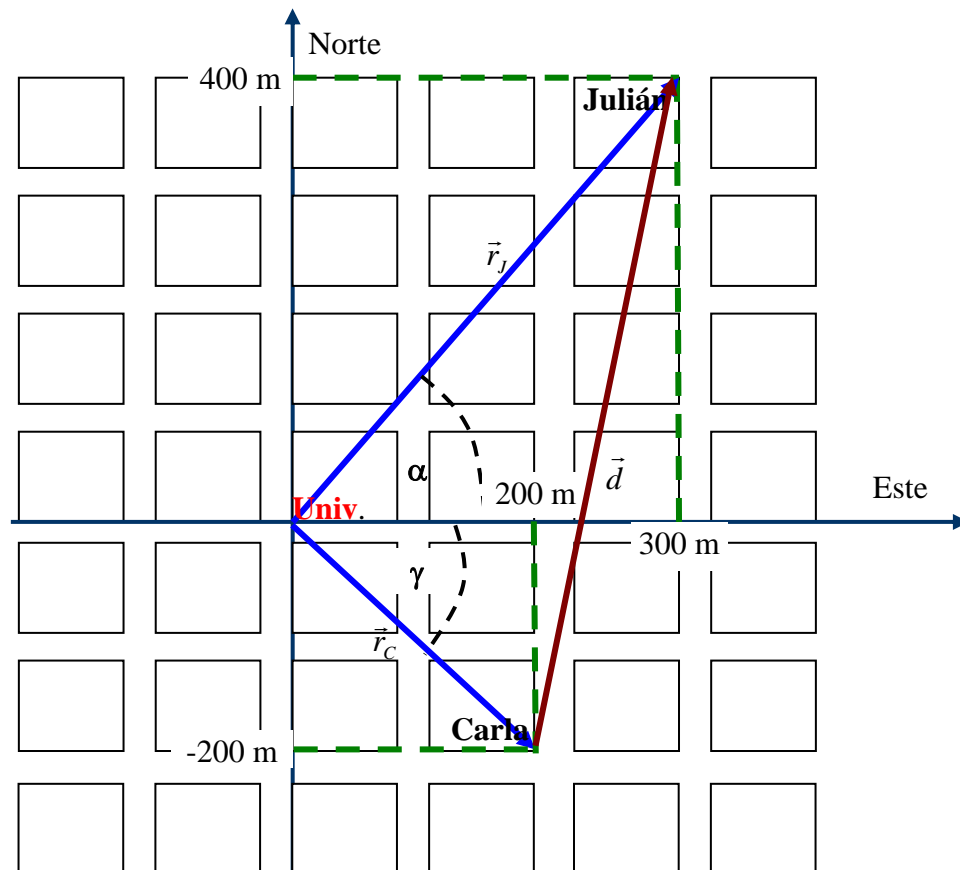
$|\vec{r}| = \sqrt{(300 m)^2 + (400 m)^2} = 500 m$ , y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x

(coincidente con la dirección Este – Oeste):  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{400}{300} \Rightarrow \alpha \cong 53^\circ$ .

Podemos dar entonces como solución que el vector posición está definido como:

$$\vec{r} \equiv (500 m ; 53^\circ)$$

2- La casa de Carla se encuentra a una cuadra al oeste y seis cuadras al sur de la de Julián. ¿Podría indicar la posición de la misma respecto de la Universidad? Si Carla visita a Julián, yendo desde su casa; ¿Cuál es el vector que marca su desplazamiento?



El vector posición que ubica la casa de Carla también tiene su origen en el origen de nuestro sistema de coordenadas, por lo que su módulo será:

$$|\vec{r}_C| = \sqrt{r_{Cx}^2 + r_{Cy}^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}_C| = \sqrt{(200 \text{ m})^2 + (-200 \text{ m})^2} = 282,8 \text{ m}$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{r_{Cy}}{r_{Cx}} = \quad \Rightarrow \quad \text{tg} \gamma = \frac{-200}{200} = -1 \Rightarrow \gamma = -45^\circ$$

¿Puede llevar la referencia angular al semieje positivo de las x (coincidente con la dirección (Este – Oeste)? (Si lo hace bien, deberá obtener un ángulo de  $315^\circ$ ).

Para definir el vector desplazamiento debemos tener en cuenta que las coordenadas de su origen son las de la casa de Carla ( $C = (200 ; -200)\text{m}$ ) y las de su extremo las de la casa de Julián ( $J = (300 ; 400)\text{m}$ ); por lo que el módulo de  $\Delta \vec{r}$  se podrá calcular como:

$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(r_{Jx} - r_{Cx})^2 + (r_{Jy} - r_{Cy})^2} \Rightarrow |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(300 - 200)^2 + (400 - (-200))^2} \Rightarrow |\Delta \vec{r}| = 608,27 \text{ m}$ ; y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x (¿se anima a marcarlo en el esquema?) es  $\delta = 80,53^\circ$ , ó  $\delta = 80^\circ 32'$ .

### Para pensar:

3- Ud. Se encuentra ubicado a la entrada de un parque de diversiones, y comienza a caminar hacia la montaña rusa, para lo cual se dirige 100 metros hacia el Este, luego gira y camina un trecho hacia el noroeste para completar el recorrido caminando 100 m hacia el norte, donde se encuentra con el juego buscado. Se percata entonces que se encuentra a 200 m al norte de la entrada, de donde partió. A) Trace un esquema dibujando los recorridos. B) Determine la magnitud del vector desconocido en ese esquema.

*Rta:* En el segundo tramo se desplazó 141,42 m hacia el noroeste, por lo que el vector se puede definir como:  $\vec{r}_2 = (141,42 \text{ m} ; 135^\circ)$



4- Parado en la puerta de su casa, Pedro avanza dando 5 pasos hacia el sur, 3 pasos hacia el oeste y 6 pasos hacia el noroeste. Todos los pasos son de igual longitud. A) Trace un esquema del recorrido de Pedro. B) ¿A Cuántos pasos hacia el Sur del lugar de partida se encuentra el final de su recorrido? C) ¿A cuántos pasos al oeste se encontró desde el lugar de inicio? D) ¿A cuántos pasos se encuentra del lugar donde empezó? E) En qué dirección se encuentra Pedro en relación al punto de partida al completar el recorrido? (Indique un ángulo en base a una dirección de referencia).

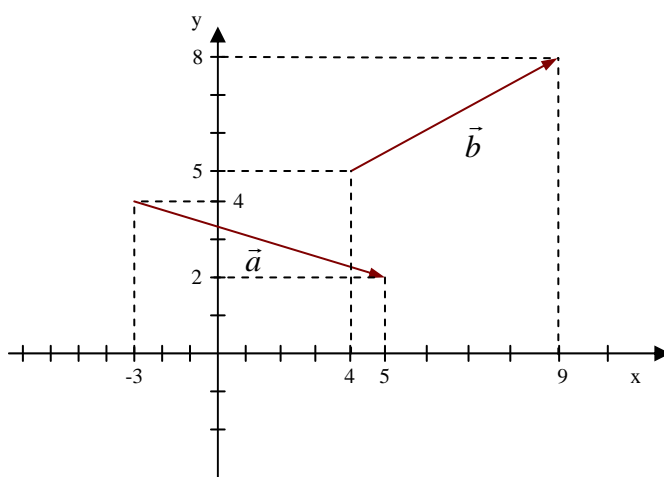
Rta: Al final del recorrido Pedro se encuentra a 0,75 pasos hacia el sur y a 7,25 pasos hacia el oeste del lugar de partida. El ángulo del vector posición final, respecto del semieje positivo del las x (ejes tomados en la dirección N-S y E-O) es de  $185^\circ 54'$

5- Un corredor corre 20 km hacia el norte y luego 15 km hacia el este. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento total del corredor.

Rta: El vector desplazamiento puede definirse como:  $\vec{\Delta r} = (25 \text{ km} ; 53,12^\circ \text{ ó } 53^\circ 7')$

6- Calcule el ángulo entre las direcciones de los dos vectores dibujados en el esquema.

Rta: el ángulo entre vectores es de  $45^\circ$ .

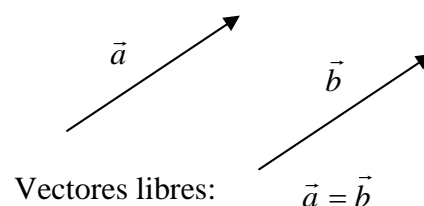


**Pregunta 1:** La temperatura puede subir o bajar, sin embargo no es una magnitud vectorial. Explique porqué.

## TIPOS DE VECTORES.

De acuerdo con la libertad de movimiento que le permitamos, los vectores pueden ser:

a- **Libres:** Son aquellos que, para su definición sólo basta conocer su módulo, dirección y sentido. Dos vectores libres que posean la misma dirección o direcciones paralelas, el mismo sentido e igual módulo se denominan *equipolentes*<sup>1</sup>, resultando equivalente tomar cualesquiera de ellos a los efectos que se requiera. Utilizaremos el signo igual (=) para referirnos a la equipolencia entre vectores. En el ejemplo

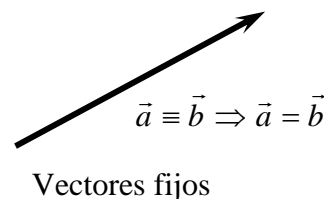


de la figura,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  resultan equipolentes, pudiendo tomar cualquiera en reemplazo del otro o, lo que es lo mismo, considerar a  $\vec{a}$  como el vector  $\vec{b}$  trasladado. En física, usamos vectores libres para representar algunas magnitudes, como por ejemplo el momento de una fuerza.

b- **Deslizantes:** Son aquellos que pueden presentar equipolencia solamente entre vectores colineales. Dos vectores deslizantes son equipolentes cuando poseen igual módulo, sentido y dirección, no considerándose así a aquellos que, aún teniendo igual sentido y módulo, poseen direcciones paralelas. En el ejemplo de la figura, los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son equipolentes, pudiendo entonces considerar al vector  $\vec{b}$ , como al vector  $\vec{a}$  trasladado. Este tipo de vectores se utiliza en física para representar magnitudes como la

fuerza aplicada a un cuerpo.

c- **Fijos:** Son aquellos vectores que para resultar equipolentes entre sí, además de cumplir con los requisitos fijados para los vectores deslizantes, deben tener origen común. Como ejemplo de vectores fijos podemos considerar a los vectores posición utilizados en física.



**¡RECUERDE!:** Antes de empezar a resolver cualquier problema o ejercicio, debe identificar claramente qué tipo de magnitudes está trabajando y qué tipo de magnitud obtendrá de resultado. ¡Sumar, restar o multiplicar vectores no implica el mismo procedimiento que hacerlo con escalares!

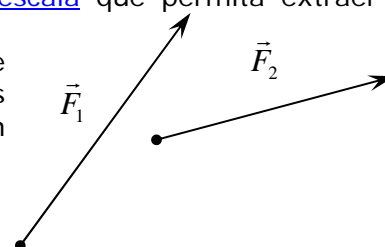
## OPERACIONES CON VECTORES.

a- **Suma:**

La suma de vectores produce como resultado otro vector, cuyo módulo no siempre resulta ser la suma de los módulos de los sumandos. Un vector que representa a una fuerza de 10 N, por ejemplo, sumado a otro que represente 15 N, generará un resultado cuyo módulo estará comprendido entre 5 y 25 N, según el ángulo que formen sus direcciones.

Se pueden sumar vectores en forma gráfica o analítica. Para la primera opción los métodos son geométricos, debiendo realizarse una construcción a escala que permita extraer un resultado a partir de una medición.

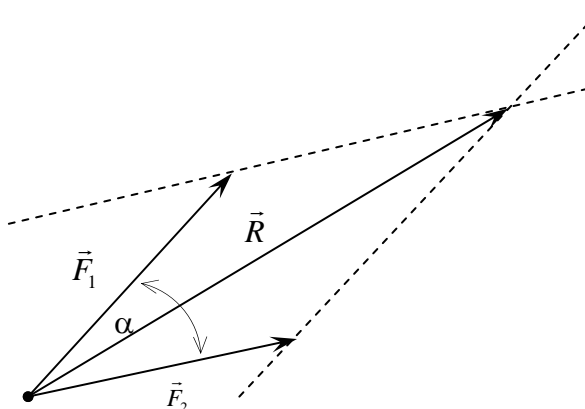
Cuando este método no es conveniente o sencillamente inaplicable (como por ejemplo: la mejor escala que podemos tomar no permite obtener un resultado de la precisión requerida), se puede determinar analíticamente el resultado. Veamos primero los métodos gráficos:



<sup>1</sup> Del latín *aequipollente*: equivalente.

# 1- Regla del paralelogramo:

Comencemos con el caso sencillo de dos vectores coplanarios, que representan a dos fuerzas medidas en N, que forman un cierto ángulo  $\alpha < 90^\circ$  entre sí.



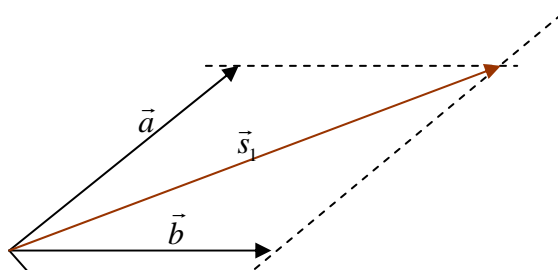
Elegimos entonces dos vectores equipolentes a los dados, con origen común, y trazando paralelas a las direcciones de ambos por los extremos, nos queda determinado un paralelogramo. La diagonal del mismo que tiene por extremos al origen común y al corte de las líneas auxiliares, resulta el módulo del vector  $\vec{R}$ , resultante de la operación, de origen común con los sumandos.

Midiendo la longitud de  $\vec{R}$ , y aplicando la escala se puede obtener el valor de la

intensidad de la fuerza que se debe aplicar en la dirección y sentido indicadas por el gráfico para, reemplazando a ambas fuerzas por  $\vec{R}$ , conseguir el mismo efecto que dichas fuerzas producen juntas.

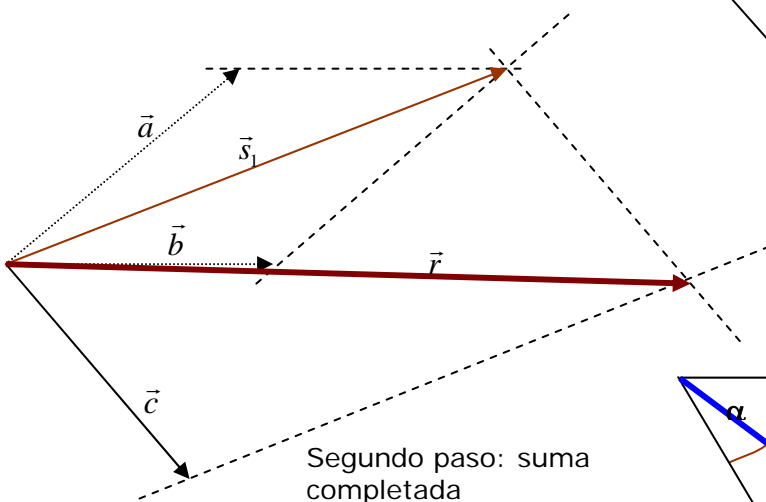
Cuando se trata de tres o más vectores, el problema se resuelve mediante sumas parciales, siempre en forma gráfica: sea el caso de sumar los tres vectores de la figura;  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

En principio, procedemos a sumar dos de ellos cualesquiera; en el ejemplo, se realizó la suma parcial  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}_1$ .



Primer paso: suma parcial

Reemplazando luego a los dos vectores sumados por su equivalente  $\vec{s}_1$ , planteamos la suma  $\vec{s}_1 + \vec{c} = \vec{r}$ .



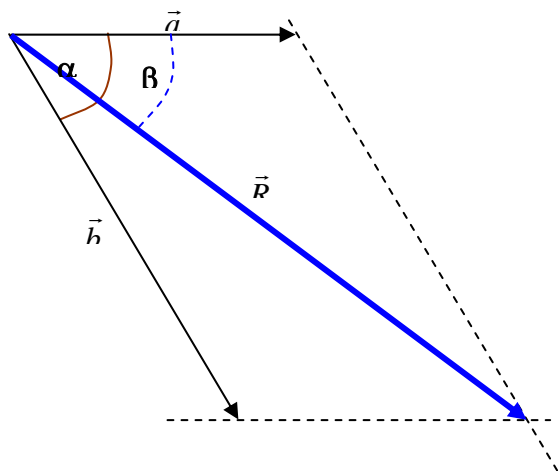
Segundo paso: suma completada

Sea por ejemplo sumar dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  cuyos datos son:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 15 \text{ cm} \\ |\vec{b}| &= 27 \text{ cm} \end{aligned} \quad \text{formando un ángulo entre sí}$$

de  $60^\circ$ . Una elección de escala conveniente sería por ejemplo:

$$E = \frac{1}{3}, \quad \text{con lo que los vectores}$$



Esquema de la suma de los dos vectores del ejemplo, por razones de construcción, aquí no se encuentran dibujados a escala.

$long.|\vec{a}| = 5\text{ cm}$   
 quedarían dibujados de:  $long.|\vec{b}| = 9\text{ cm}$  ; construyendo el esquema:

Midiendo con una regla la longitud del vector  $\vec{R}$  se obtiene que:  $long.|\vec{R}| = 12,3\text{ cm}$ . lo que, aplicando la escala de construcción, obtenemos como valor real del módulo de R:  $|\vec{R}| = 36,9\text{ cm}$ .

En cuanto al ángulo, podemos medirlo con un transportador, obteniéndose en este caso una amplitud de:  $\beta = 39^\circ$ .

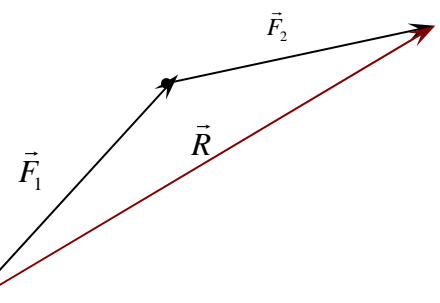
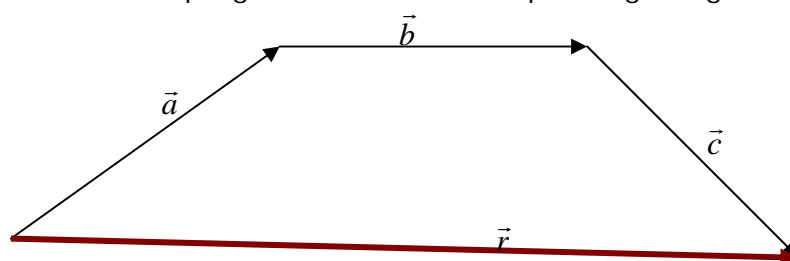
Podemos expresar entonces que la suma de ambos vectores arrojó un vector resultante de 36,9 cm de módulo, formando un ángulo de  $39^\circ$  con la dirección del vector  $\vec{a}$ .

Este método resulta muy complicado cuando la suma está planteada entre cuatro, cinco o más vectores, más que nada por la cantidad de líneas que se deben trazar. Existe un método gráfico más sencillo, que es el que usaremos nosotros cuando sea necesario para el desarrollo de este curso: el método del polígono.

## 2 - Regla del polígono:

Sea por ejemplo, plantear la suma entre los dos vectores coplanarios  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , tomados como ejemplo para el desarrollo de la regla del paralelogramo. Tomando como partida a uno de ellos, en este caso  $\vec{F}_1$ , dibujamos al equipolente a  $\vec{F}_2$ , cuyo origen coincida con el extremo de  $\vec{F}_1$ .

Quedan así libres el origen de  $\vec{F}_1$  y el extremo de  $\vec{F}_2$ . Cerrando el polígono con un vector que tenga origen



en el origen libre, y su extremo coincidente con el extremo de  $\vec{F}_2$ , tendremos definido el vector suma.

Cuando se trata de tres o más vectores, sólo basta con repetir el procedimiento, es decir, colocar vectores equipolentes a

los dados, uno a continuación del otro, siendo la suma el vector que cierra el polígono.

En el ejemplo,  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{r}$ .

Resulta obvio de todo esto que, cuando los vectores que intervienen en la suma dibujan un polígono cerrado, el resultado de la misma es el **vector nulo**<sup>2</sup>.

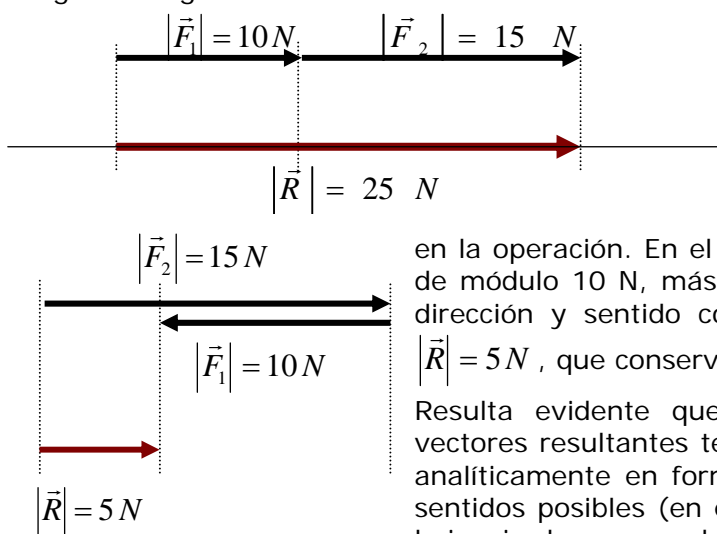
**Pregunta 2:** ¿Qué figura geométrica queda construida cuando se suman dos vectores de módulo **a**, para dar como resultado otro vector de módulo **a**? ¿Qué característica especial tiene esa figura? Consejo: Construya a escala la suma gráfica.

## Un caso particular: vectores colineales:

Cuando los vectores a sumar resultan tener igual sentido y direcciones paralelas, el resultado será otro vector que conserve la dirección y sentido de los sumandos, y su módulo será igual a la suma de los módulos de los mismos. Este es el único caso en que, un vector que represente una fuerza de 10 N más otro que represente 15 N, dará por resultado un

<sup>2</sup> Se llama vector nulo a aquel cuyo origen coincide con su extremo, lo que hace que tenga **módulo cero**.

vector representando una fuerza de 25 N. El método se puede apreciar mejor en la siguiente figura:

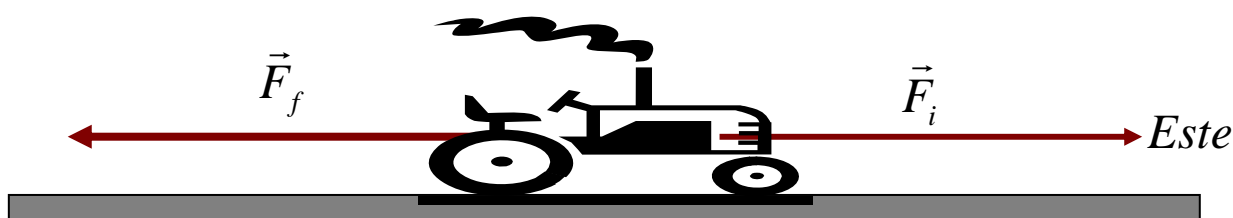


Cuando los vectores a sumar resulten tener direcciones paralelas y distinto sentido, el resultado será otro vector que conserve la dirección de ambos, el sentido del de mayor módulo y su módulo será igual a la resta de los módulos de los vectores intervinientes

en la operación. En el ejemplo de la siguiente figura, un vector de módulo 10 N, más otro que represente 15 N con la misma dirección y sentido contrario, dará por resultado otro vector  $|\vec{R}| = 5 N$ , que conservará el sentido del mayor.

Resulta evidente que, para cada uno de estos casos, los vectores resultantes tendrán un módulo que podremos calcular analíticamente en forma muy sencilla, y sólo uno de los dos sentidos posibles (en el ejemplo sería hacia la derecha o hacia la izquierda, pero podría ser también hacia arriba o hacia abajo, hacia el Noroeste o hacia el Sudeste, etc.). Podemos simplificar la notación entonces, prescindiendo de la notación clásica para los vectores ( $\vec{F}$ ), reemplazándola por un signo a convenir: positivo o negativo según sea el sentido sobre la única dirección actuante. Así, en el ejemplo de la figura anterior, si consideramos positivos aquellos vectores con sentido hacia la derecha,  $F_2$  será positivo,  $F_1$  será negativo y  $R$  resultará positivo. La operación se podrá indicar entonces como :  $F_2 - F_1 = R$ . Donde podemos obtener no sólo el módulo del vector  $R$ , sino que el signo algebraico de la operación automáticamente nos informará del sentido del mismo.

Esta notación resulta muy útil en Física para la representación de magnitudes vectoriales que actúan a lo largo de un eje. Si consideramos por ejemplo, el caso de un tractor que avanza hacia el Este y es frenado por una fuerza constante opuesta al movimiento (fuerza de rozamiento), el gráfico sería:



Considerando positivo hacia el este, la fuerza impulsora  $F_i$  resultaría positiva mientras que la de frenado  $F_f$  tomaría valores negativos. Calculando la resultante, el signo nos dará cabal idea de lo que ocurrirá con el movimiento de ese vehículo: si se frenará ( $R$  negativa), si aumentará cada vez más su velocidad ( $R$  positiva) o si continuará marchando a velocidad constante ( $R$  nula).

### Pruebe Ud. de realizar a modo de práctica los siguientes ejercicios<sup>3</sup>:

- 1- Se desea sumar un vector de módulo 2 con otro de módulo 1 para obtener un resultado de módulo 2. Realice un esquema geométrico que muestre la suma. ¿Qué condición deben cumplir ambos vectores para que la suma sea la pedida?

*Rta: Deben formar un ángulo entre sus direcciones de  $104^\circ 28'$  aproximadamente.*

<sup>3</sup> Para resolver la siguiente ejercitación necesitará munirse de regla, compás, escuadra, transportador y lápiz de punta fina además de una calculadora.

- 2- Dos vectores tienen módulos diferentes ( $F_1 \neq F_2$ ) ¿Puede ser que la suma de ambos de por resultado un vector nulo? Justifique su respuesta.

*Rta: La suma de ambos nunca puede dar cero. Tres vectores sumados, aunque sean de diferente módulo o bien dos vectores opuestos pueden dar cero como resultado, pero dos de distinto módulo no. (busque la explicación geométrica).*

- 3- Suponga que la suma de dos vectores  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$  tiene la particularidad de que se cumple que:  $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = |\vec{F}|$ ; ¿Qué puede decirse acerca de la dirección y sentido de los dos vectores? Resuelva gráficamente.

*Rta: deberán formar un ángulo de  $0^\circ$  entre sus direcciones.*

- 4- Si  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ , y  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  a) ¿Cuál es el valor máximo de  $F_3$ ? B) ¿Cuál es el valor mínimo de  $F_3$ ?

*Rta: El mínimo valor de  $|\vec{F}_3| = 0$ , y además  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . El máximo valor es:  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$ ; siendo además:  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$*

- 5- Pamela camina 4 km hacia el este y luego 8 km hacia el norte. Utilizando el método del polígono encuentre el desplazamiento de Pamela (De el resultado en módulo y ángulo).

*Rta: 8,94 km  $63,4^\circ$  N de E*

- 6- Una fuerza de 200 N actúa hacia abajo simultáneamente con una fuerza de 500 N dirigida hacia la izquierda. Encuentre la fuerza resultante utilizando el método del polígono. Compruebe la respuesta con el método del paralelogramo.

*Rta: El módulo de la resultante es de aproximadamente 538,5 N, formando un ángulo de aproximadamente  $22^\circ$  con la dirección de la fuerza de 500 N.*

- 7- Una lancha navega hacia el oeste una distancia de 200 m, luego gira hacia el norte y recorre 400 m. Si luego se mueve 100 m en una dirección que forma un ángulo  $30^\circ$  al sur del este. ¿Cuál es el desplazamiento resultante utilizando el método del polígono?

*Rta: El módulo del desplazamiento resultante es de aproximadamente 368 m; y su dirección forma un ángulo de aproximadamente  $108^\circ$  hacia el sur con la dirección este - oeste.*

- 8- Un río fluye hacia el sur a 20 km/h; un bote tiene una velocidad en aguas quietas de 50 km/h. ¿Cuál es la velocidad que alcanzará el bote si cruza el río viajando hacia el este a todo motor? (indique resultado dando el módulo y el ángulo que forma la velocidad con la dirección este - oeste).

*Rta: La velocidad será de un módulo de aproximadamente 54 km/h, formando un ángulo de aproximadamente  $-22^\circ$  con la dirección mencionada.*

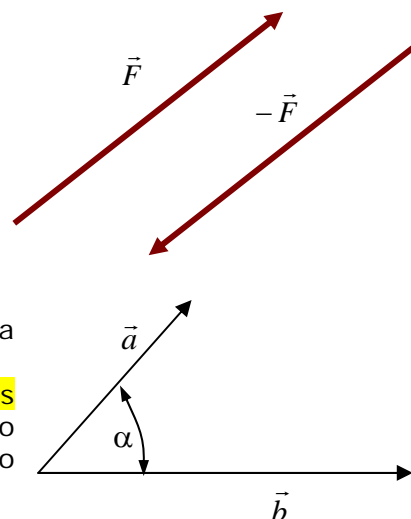
### **b- Resta:**

Para poder definir con más claridad esta operación es necesario aclarar primero a que llamamos **vector opuesto**:

**Vector opuesto** a uno dado, es aquel vector que conserva el módulo y la dirección del original, teniendo sentido contrario. En la notación, al opuesto de un vector  $\vec{F}$ , se lo designa como  $-\vec{F}$ . El signo menos indica justamente el cambio de sentido.

Una mejor visualización se puede apreciar en el esquema adjunto.

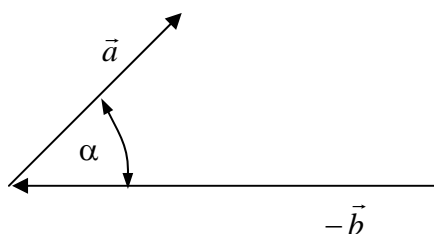
Restar dos vectores, implica entonces, sumar uno de ellos con el opuesto del otro, cualquiera sea el método elegido para ello. Por comodidad y a los efectos de remitirnos a lo estrictamente necesario, plantearemos el:



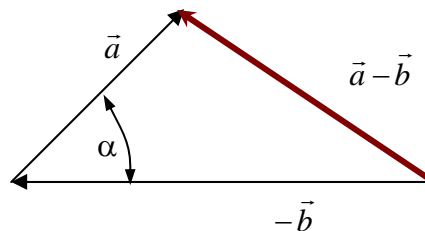
### Método del polígono:

Sea como ejemplo, la resta de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , que forman un ángulo  $\alpha$  entre sus direcciones, tal y como muestra el esquema.

Realizar la resta de ambos  $\vec{a} - \vec{b}$  implica entonces, hacer  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , por lo que debemos reemplazar a  $\vec{b}$  por su opuesto:  
El esquema muestra una posible resolución gráfica.

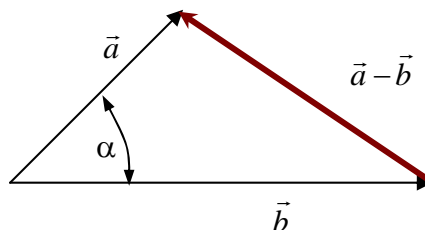


*Primer paso: se construye el vector opuesto a  $\vec{b}$ , aquí llamado  $-\vec{b}$*



*Segundo paso: Sumamos  $\vec{a} + (-\vec{b})$  gráficamente por la regla del polígono.*

Otra manera de resolver el problema gráficamente se muestra a continuación, donde los vectores han sido dibujados con sus orígenes coincidentes<sup>4</sup>.



*La diagonal que une ambos extremos de los vectores es el módulo de la resta.*

Esta segunda disposición resulta a todas luces mucho más cómoda a la hora de operar, por lo que será la que habremos de adoptar para la resolución gráfica de resta de vectores. El mecanismo operativo para proceder a restar dos vectores será entonces:

**Dibujar ambos vectores a escala con sus orígenes coincidentes.**

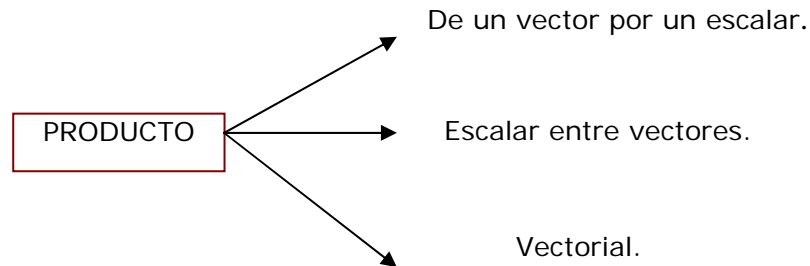
**El vector resultado de la resta será aquel que cierre el polígono uniendo los extremos libres de ambos, y que tendrá sentido orientado hacia el minuendo de la resta.**

En el ejemplo,  $\vec{a} - \vec{b}$  tiene por resultado un vector que apunta hacia  $\vec{a}$ . Si la resta hubiera sido  $\vec{b} - \vec{a}$ , el vector resultado apuntaría hacia  $\vec{b}$ .

<sup>4</sup> Trate, a modo de ejercicio, de demostrar la equivalencia entre ambas construcciones. (ayuda: compare los triángulos formados)

### c- Producto:

Operando con vectores, se pueden distinguir tres clases de productos.



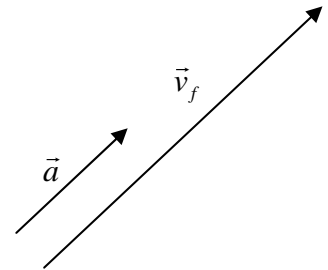
#### 1- Producto de un vector por un escalar:

El producto de un vector  $\vec{a}$  por un escalar Real  $n$ , tiene por resultado otro vector que:

1. Conservará la dirección del vector  $\vec{a}$ .
2. Tendrá igual sentido que  $\vec{a}$ , si  $n$  es positivo.
3. Tendrá sentido contrario a  $\vec{a}$ , si  $n$  es negativo.
4. El módulo del resultado será el producto del módulo de  $\vec{a}$  por el valor absoluto de  $n$ .

Ejemplo: Sea el vector  $\vec{a}$ , que representa la velocidad de un móvil que viaja hacia el noreste a 45 km/h. Supongamos que luego de cierto tiempo triplica su módulo<sup>5</sup>, conservando la dirección y sentido de marcha. Matemáticamente podemos escribir esto como  $\vec{v}_f = \vec{a} \times 3$ . Teniendo el vector  $\vec{v}_f$ :

1. La misma dirección que  $\vec{a}$ .
2. El mismo sentido ( $n > 0$ ) que  $\vec{a}$ .
3.  $|\vec{v}_f| = 3 \times |\vec{a}|$ .



#### Vectores de módulo uno: los versores:

De igual manera en que podemos multiplicar un vector por un escalar, también podemos dividirlo.

Dividir un vector  $\vec{a}$  por un escalar  $n$ , produce como resultado otro vector que tendrá:

1. La misma dirección que  $\vec{a}$ .
2. El mismo sentido que  $\vec{a}$  si  $n$  es positivo, o sentido contrario si  $n$  es negativo.
3. Un módulo que resultará de dividir  $n$  veces el módulo de  $\vec{a}$ .

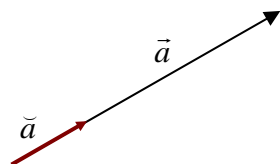
Para el caso particular en que:  $n = \frac{1}{|\vec{a}|}$ , la división quedará planteada como:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}$$

El vector así definido, conserva la dirección y el sentido de  $\vec{a}$ , pero su módulo se ha reducido a la unidad. A estos vectores se los denomina **versores**, y se los representa con una virgulilla encima del símbolo, tal y como se muestra en la ecuación.

El concepto de versor es importante porque permite expresar cualquier vector, como el producto de un escalar que represente a su módulo, por el versor que conserve su dirección y sentido. El vector  $\vec{a}$  puede expresarse entonces, como:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}$$

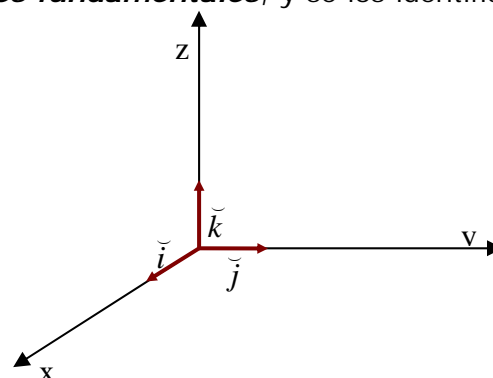


<sup>5</sup> La velocidad es una magnitud de tipo vectorial, por lo que para definirla debe indicarse módulo, dirección y sentido.



Resulta útil asignar para cada eje cartesiano, un versor que apunte hacia el sentido positivo del mismo. A estos versores se los denomina **versores fundamentales**, y se los identifica como:

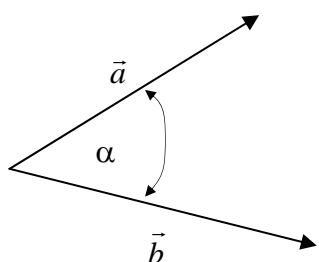
Versor  $\vec{i}$  para el semieje  $+x$ .  
 Versor  $\vec{j}$  para el semieje  $+y$ .  
 Versor  $\vec{k}$  para el semieje  $+z$ .



**Pregunta 3:** Nótese que el módulo de los versores se encuentra expresado por un número adimensional. ¿Puede explicar por qué?

## 2- Producto Escalar:

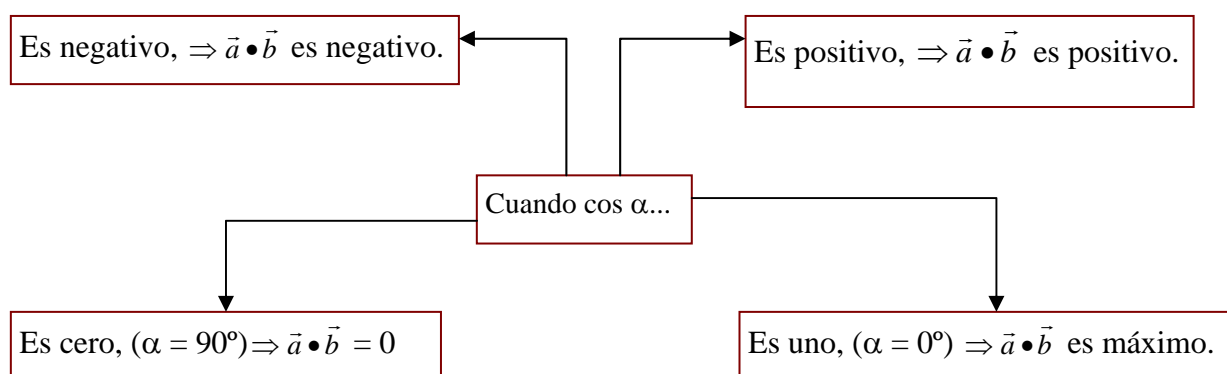
Sean, por ejemplo, los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , se define como producto escalar o producto interior entre ambos, al valor obtenido como resultado de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman sus direcciones. El resultado de este producto es una magnitud de tipo escalar. Simbólicamente:



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Y se lee "a escalarmente b".

Al tener como resultado un escalar, el producto escalar es conmutativo ( $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ ), también puede observarse de la ecuación, que su resultado puede ser positivo, negativo o cero, de acuerdo con el valor del coseno de  $\alpha$ . Esquemáticamente:



De esto se infiere que, cuando el producto escalar entre dos vectores coplanares es nulo, ambos poseen direcciones perpendiculares entre sí, mientras que cuando su módulo es máximo<sup>6</sup> ( $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ), tienen direcciones paralelas. Esto permite definir con mayor justeza las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre vectores.

<sup>6</sup> El producto escalar tiene módulo máximo para valores del  $\cos \alpha = 1$  ó  $\cos \alpha = -1$ . En el primer caso, ambos vectores son paralelos con igual sentido, mientras que en el segundo son paralelos con sentidos opuestos.

Algunas propiedades a tener en cuenta acerca del producto escalar son:

- El producto escalar es conmutativo: o sea que:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Es distributivo con respecto a la suma y a la resta de vectores:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

**¡RECUERDE!** El producto escalar de vectores da por resultado un escalar. Tenga cuidado a la hora de operar: Los factores son vectores, pero el resultado no.

### 3- **Producto Vectorial:**

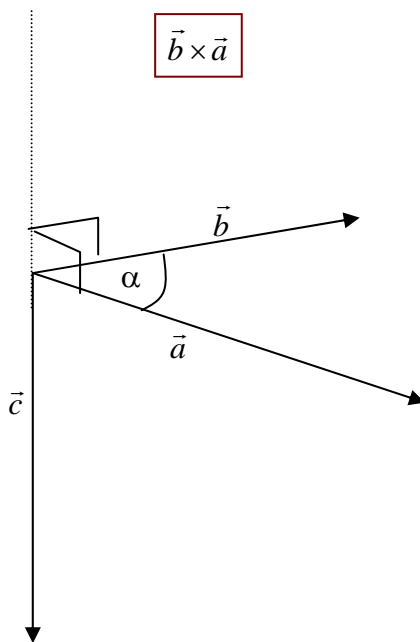
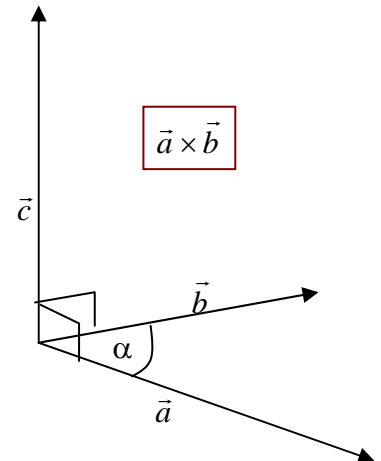
El llamado producto vectorial o externo entre vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , tiene por resultado otro vector  $\vec{c}$ , que posee:

- Un módulo: que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de ellos, por el seno del ángulo que forman sus direcciones. Simbólicamente:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen} \alpha$$

Y se lee "a vectorialmente b".

- Una dirección: que resulta perpendicular al plano determinado por la dirección de los vectores.
- Un sentido obtenido entrante o saliente al plano



determinado por ambos vectores, según una regla nemotécnica denominada "**regla del tirabuzón**" o "**regla del tornillo**", que consiste en hacer girar un tirabuzón imaginario en el sentido en que se multiplica (en este caso, de  $\vec{a}$  hacia  $\vec{b}$ ), el avance del mismo marca el sentido del vector resultado (en este caso  $\vec{c}$ ). Si el producto realizado hubiera sido  $\vec{b} \times \vec{a}$ , el vector resultado hubiera tenido sentido entrante al plano determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Resulta evidente que  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ; lo que muestra que el producto vectorial no es conmutativo.

Como el módulo del vector resultado se calcula a partir de la expresión  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen} \alpha$ , su valor variará de acuerdo con el que tome  $\alpha$ .

De lo que se deduce que la condición necesaria para que dos vectores coplanares sean paralelos, es que su producto vectorial sea cero, mientras que si son perpendiculares, tomará máximo valor.

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

será máximo, cuando  $\text{sen } \alpha = 1$  ( $\alpha = 90^\circ$ ).

será nulo, cuando  $\text{sen } \alpha = 0$  ( $\alpha = 0^\circ$ ).

Resumiendo:

Dos vectores coplanares tienen direcciones perpendiculares cuando...		Dos vectores coplanares tienen direcciones paralelas cuando...	
Su producto escalar es cero ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ )	Su producto vectorial es máximo ( $\vec{a} \times \vec{b} = \text{máx.}$ )	Su producto escalar es máximo ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{máx.}$ )	Su producto vectorial es cero ( $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ )

Las propiedades a destacar del producto vectorial:

a. El producto vectorial es anticonmutativo: Es evidente que si  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , por la regla de la mano derecha el producto  $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C}$ , con lo que:  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .

b. Es distributivo con respecto a la suma y a la resta de vectores:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

c. Si multiplicamos un producto vectorial por un escalar  $\lambda$ , se cumple que:

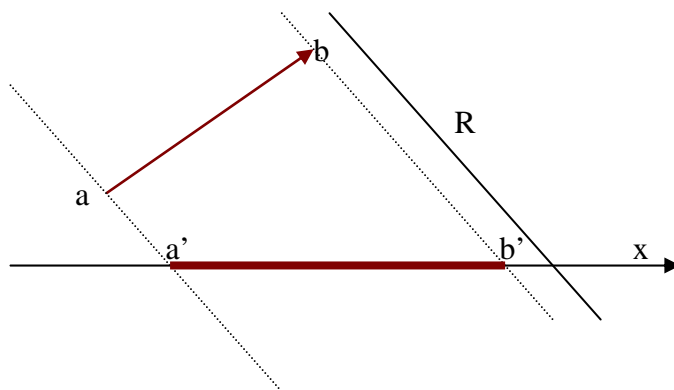
$$\lambda \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\lambda \cdot \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (\lambda \cdot \vec{B})$$

**Pregunta 4:** Suponga que tiene un vector  $\vec{A} \neq 0$ , Si  $\vec{A} \times \vec{B} = 0$  y  $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$ , ¿esto significa que  $|\vec{B}| = 0$ ?

### COMPONENTES DE UN VECTOR.

#### 1. Proyección de un vector sobre un eje:

Dada una recta de proyección  $R$ , y un eje no paralelo a ella  $x$ ; se denomina proyección del vector  $\vec{ab}$ , al segmento  $\overline{a'b'}$  que posee por extremos los puntos pertenecientes a  $x$  que resultan de proyectar el origen y el extremo del vector dado según la dirección  $R$ . Cuando la dirección de proyección es perpendicular al eje, la proyección recibe el nombre de **ortogonal**.



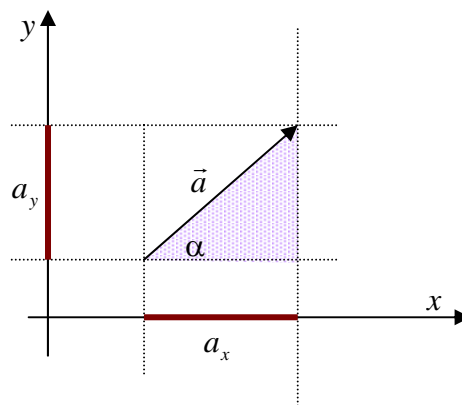
#### 2- Proyección de un vector sobre dos ejes ortogonales:

Proyectar un vector  $\vec{a}$  sobre dos ejes  $x$  e  $y$ , perpendiculares entre sí, implica proyectar  $\vec{a}$  sobre  $x$  según la dirección  $y$ , y viceversa.

Las proyecciones de  $\vec{a}$  sobre los ejes, determinan los segmentos  $a_x$  y  $a_y$ , tal y como se muestra en el esquema.

El segmento que resulta de la proyección del vector sobre el eje, tendrá una longitud que, como se puede apreciar a partir de un análisis sencillo, tendrá un valor máximo igual al módulo del vector (cuando la dirección del mismo sea paralela al eje) y un valor mínimo de cero (cuando la dirección del vector sea paralela a la recta de proyección). Esto puede indicarse en forma más precisa diciendo que:

$$|\overline{ab}| \geq \overline{ab}$$



El valor de estas proyecciones puede calcularse fácilmente utilizando conceptos de trigonometría. Para el esquema de la derecha, en el triángulo sombreado, el cateto opuesto

al ángulo  $\alpha$ , tiene la misma medida que  $a_y$ , y el cateto adyacente es congruente con  $a_x$ , por lo que podemos escribir:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \text{De donde:} \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \text{De donde:} \quad a_x = |\vec{a}| \cdot \text{cos } \alpha$$

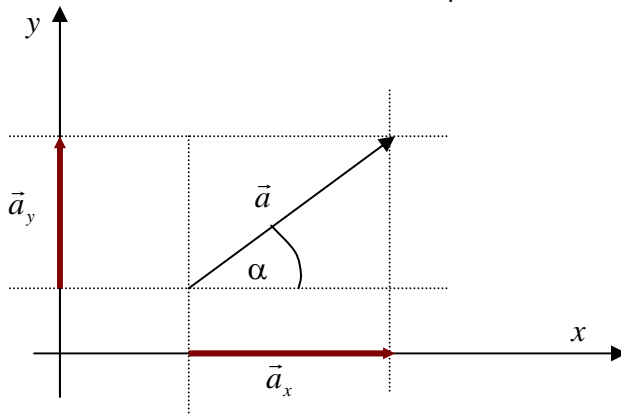
A estas proyecciones se las suele llamar **componentes escalares** de un vector.

### 3- Componentes vectoriales:

Como ya hemos visto, el producto de un escalar por un versor produce como resultado un vector con la dirección y sentido del versor, y de módulo igual al escalar. Esto permite que, con un sencillo procedimiento, las proyecciones de un vector sobre los ejes se transformen en vectores.

En efecto, si a cada segmento producto de la proyección lo multiplicamos por el versor correspondiente al eje, habremos obtenido dos vectores, cuya suma vectorial tiene por resultado al vector original.

Puede verse claramente en el esquema de la



forma con uno de los ejes del sistema de referencia (normalmente con el semieje positivo de las x) aplicando conocimientos elementales de geometría.

En el esquema siguiente, por ejemplo, se puede expresar a  $\vec{a}$  como:  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ , expresada la suma geométrica por la regla del polígono.

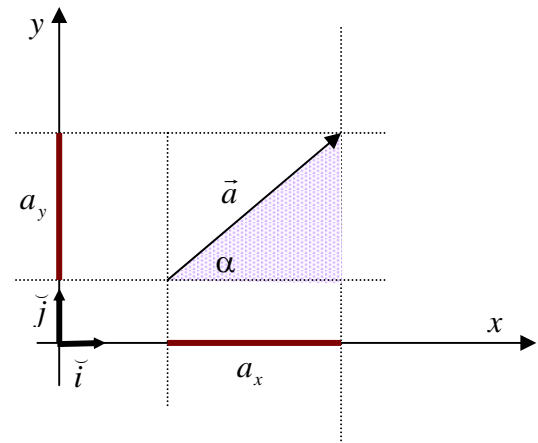
Si consideramos el triángulo rectángulo formado, veremos que

$$|\vec{a}| = \text{hipotenusa } ABC$$

$$|\vec{a}_x| = \text{cateto } ABC$$

$$|\vec{a}_y| = \text{cateto } ABC$$

Podemos calcular el módulo del vector aplicando el teorema de Pitágoras:

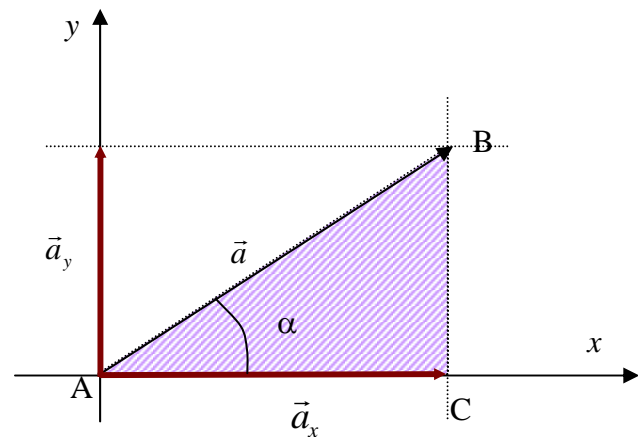


izquierda que :

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Esta forma de expresar un vector como la suma de sus componentes vectoriales cartesianas, resulta muy útil en física para el planteo de modelos físicos expresados en forma matemática, como se verá después.

A la inversa, conociendo las componentes cartesianas, se puede calcular el módulo del vector que definen y el ángulo que



$$\text{Si: } |\vec{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2}$$

Mientras que el ángulo del vector con el semieje positivo de las x:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{a_y}{a_x} \right)$$

#### 4- Componentes en tres dimensiones:

Cuando se necesita trabajar en tres dimensiones, las proyecciones resultarán ahora como muestra la figura, donde se puede expresar al vector  $\vec{a}$  como la suma de sus componentes, o sea:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

Siendo:

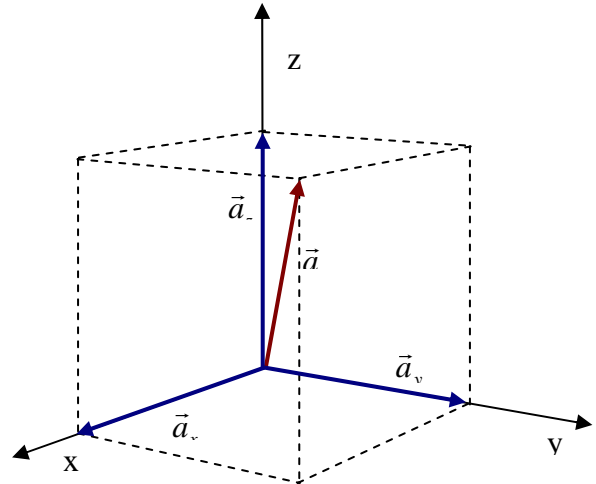
$$\vec{a}_x = a_x \times \vec{i}$$

$$\vec{a}_y = a_y \times \vec{j}$$

$$\vec{a}_z = a_z \times \vec{k}$$

De donde, geoméricamente, también se pueden calcular el módulo del vector y los ángulos que forma con cada uno de los ejes.

Todos estos conceptos pueden usarse para resolver la suma o resta de vectores en forma analítica. Veamos cómo se procede.



#### SUMA – RESTA ANALÍTICA DE VECTORES.

Supongamos que queremos sumar los dos vectores representados en el esquema; y no queremos (o no podemos) resolverlo gráficamente. Es evidente que debemos plantear algún método analítico de resolución. La estrategia que mejor funciona para hacerlo la podemos definir en los siguientes pasos:

- Descomponemos a cada uno de los vectores en sus componentes cartesianas; nos quedarán expresados entonces como la suma de sus componentes.
- Sumamos las componentes (o restamos, según sea el caso) en cada eje; nos quedará al término de esto, un vector resultante en la dirección según del eje x:  $(\vec{R}_x)$ , y otro en la dirección del eje y:  $(\vec{R}_y)$ .

- Estamos en condiciones de expresar

nuestro resultado entonces como:  $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$

- O bien calcular el módulo y el ángulo del

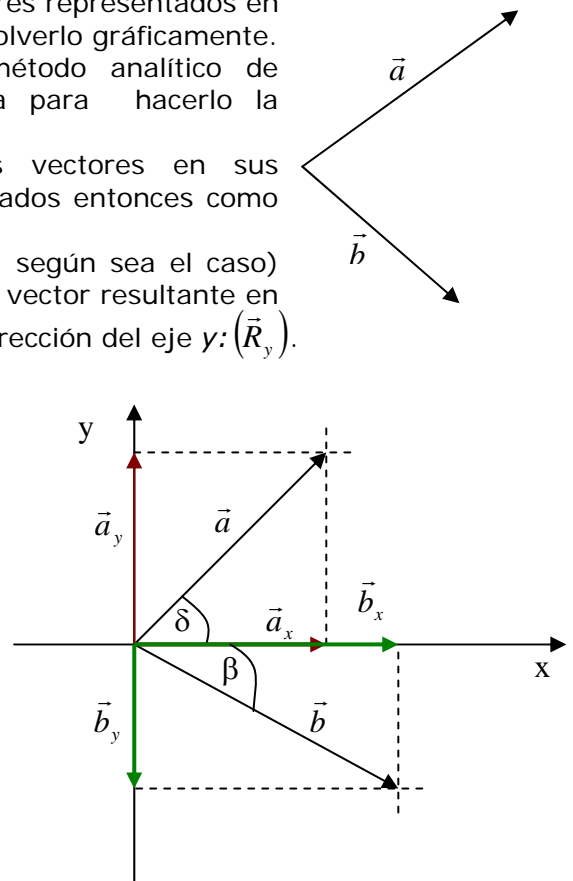
resultado como:  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ ; y  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$

Aplicando esto será:

1- Tomando un sistema de referencia, descomponemos ambos vectores: cada vector estará expresado entonces :

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

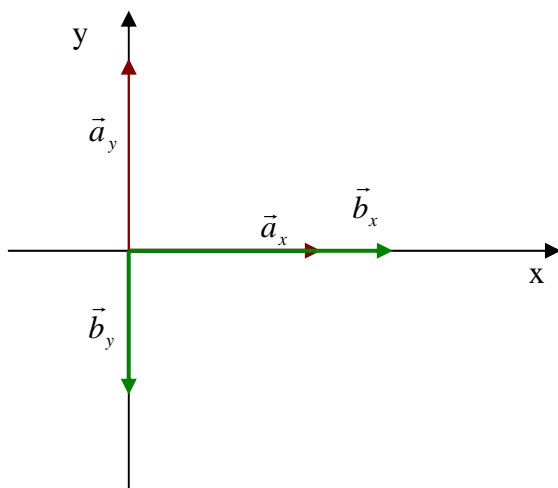
$$\vec{b} = \vec{b}_x + \vec{b}_y \quad \text{o mejor aún:}$$



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$$

2- Nos queda ahora un sistema formado por las cuatro proyecciones:

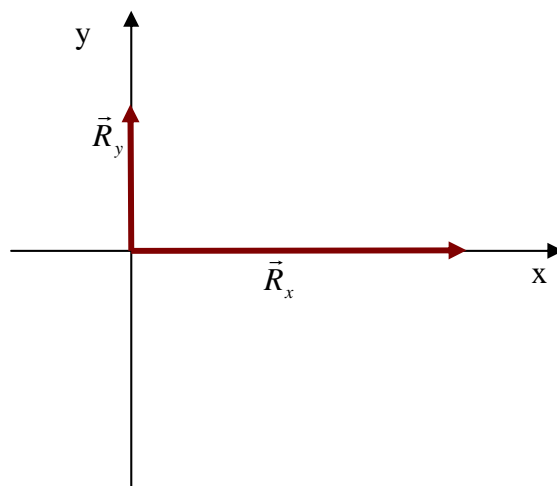


3- Sumamos las proyecciones<sup>7</sup> en cada eje:

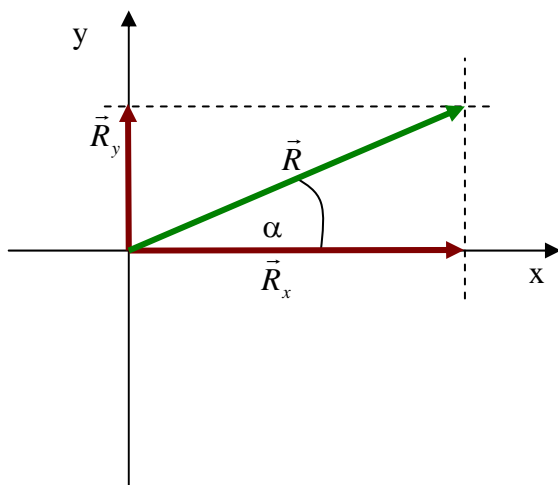
$$\vec{R}_x = a_x \vec{i} + b_x \vec{i}$$

$$\vec{R}_y = a_y \vec{j} + b_y \vec{j}$$

Nos quedará entonces:



4- Podemos expresar entonces el resultado de nuestra suma como:  $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ , o calcular el módulo y el ángulo de la resultante del sistema tal y como lo expresamos en el punto (d).



Quedará entonces:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \text{ y } \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}$$

Expresando el valor de la resultante en función del módulo y el ángulo:  $\vec{R} \equiv (R; \alpha)$

**Más ejemplos:**

1- Un avión se desplaza en el aire quieto a una velocidad de 800 km/h; cuando sus motores lo impulsan hacia el NO. ¿Cuál será la velocidad del mismo respecto de tierra si debe atravesar

una zona con viento que sopla hacia el NE a 100 km/h?

**Solución:**

Haciendo un gráfico se puede apreciar que las componentes de las velocidades son:

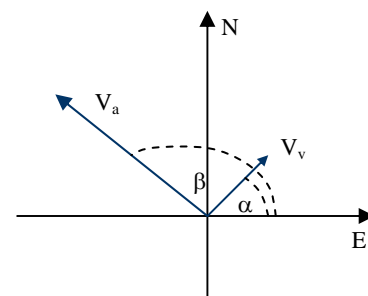
$$\vec{V}_{v_x} = V_v \times \cos 45^\circ \vec{i}$$

$$\vec{V}_{v_y} = V_v \times \operatorname{sen} 45^\circ \vec{j}$$

$$\vec{V}_{a_x} = V_a \times \cos 135^\circ \vec{i}$$

$$\vec{V}_{a_y} = V_a \times \operatorname{sen} 135^\circ \vec{j}$$

Calculando sus valores:



<sup>7</sup> Nótese que en el esquema tomado como ejemplo, la suma de las proyecciones sobre el eje y, se resuelve restando los módulos.

$$\begin{aligned}\vec{V}_{v_x} &= 70,7 \text{ km/h } \vec{i} & \vec{V}_{a_x} &= -560 \text{ km/h } \vec{i} \\ \vec{V}_{v_y} &= 70,7 \text{ km/h } \vec{j} & \vec{V}_{a_y} &= 560 \text{ km/h } \vec{j}\end{aligned}$$

Planteada la suma:

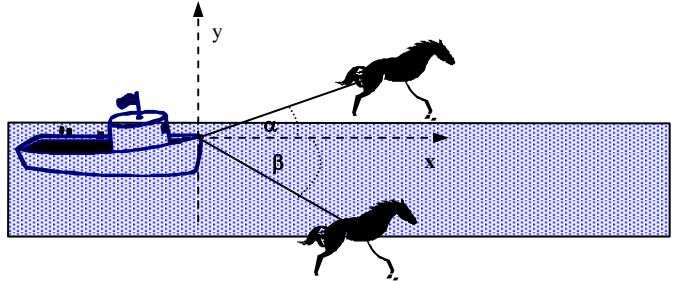
$$\vec{V}_{R_x} = (70,7 - 560) \text{ km/h } \vec{i} \quad \text{De donde:}$$

$$\vec{V}_{R_y} = (70,7 + 560) \text{ km/h } \vec{j}$$

$$\vec{V}_R = (-489,3 \vec{i} + 630,3 \vec{j}) \text{ km/h}$$

Encuentre Ud. El módulo del vector resultante y el ángulo que forma con la dirección Este – Oeste.

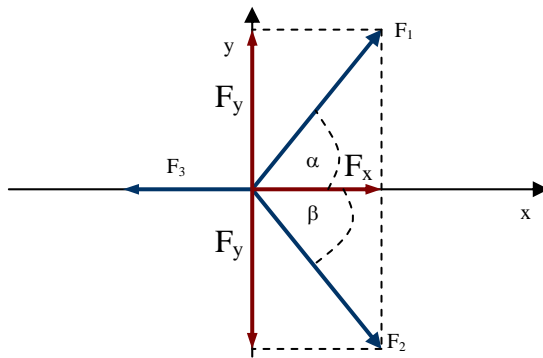
2- Una barcaza es arrastrada río arriba por medio de dos caballos que, atados a la proa por medio de sendas sogas, caminan por orillas opuestas del río, tal y como lo muestra el esquema. La fuerza que hace cada caballo es de 3000 N, mientras que el río ofrece una resistencia de 1000 N hacia atrás. Los ángulos que las sogas forman con la dirección de movimiento del barco son:  $\alpha = \beta = 53^\circ$



Encuentre el valor de la fuerza resultante sobre la barcaza.

**Solución:**

Haciendo un esquema más simplificado, nos queda:



Donde podemos calcular las componentes como:

Para la fuerza resistente del agua:

$$\vec{F}_{3_x} = F_3 \times \cos 180^\circ \vec{i} = -1000 \text{ N } \vec{i}$$

$$\vec{F}_{3_y} = F_3 \times \sin 180^\circ \vec{j} = 0 \vec{j}$$

Para la fuerza motora de ambos caballos:

$$\vec{F}_{1_x} = F_1 \times \cos 53^\circ \vec{i} = 1800 \text{ N } \vec{i}$$

$$\vec{F}_{1_y} = F_1 \times \sin 53^\circ \vec{j} = 2400 \text{ N } \vec{j}$$

$$\vec{F}_{2_x} = F_2 \times \cos(-53^\circ) \vec{i} = 1800 \text{ N } \vec{i}$$

$$\vec{F}_{2_y} = F_2 \times \sin(-53^\circ) \vec{j} = -2400 \text{ N } \vec{j}$$

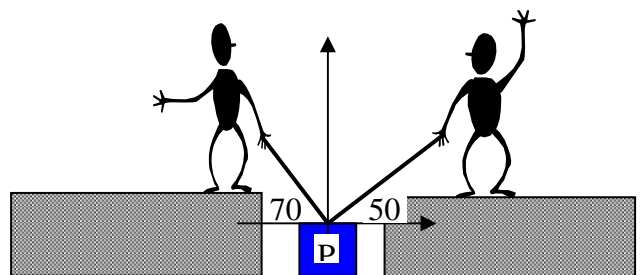
$$\vec{R}_x = (1800 + 1800 - 1000) \text{ N } \vec{i} = 2600 \text{ N } \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_y = (2400 - 2400) \text{ N } \vec{j} = 0 \vec{j}$$

3- Arquímedes y Pericles suben un paquete que pesa 100 kgf con auxilio de una soga tal y como muestra el esquema. El paquete debe subir moviéndose verticalmente impulsado por una fuerza de 20 kgf; ¿Puede Ud. calcular el valor de la fuerza que hace cada uno?

**Solución:**

Evidentemente, las fuerzas que hacen ambos muchachos son hacia arriba y en las direcciones de las sogas, por lo que, representando los vectores en un sistema de ejes nos queda un esquema donde :



$$\vec{A}_x = |\vec{A}| \times \cos(-70^\circ) \vec{i} = -0,342A \vec{i}$$

$$\vec{A}_y = |\vec{A}| \times \sin(-70^\circ) \vec{j} = 0,939A \vec{j}$$

$$\vec{P}_x = |\vec{P}| \times \cos 50^\circ \vec{i} = 0,643P \vec{i}$$

$$\vec{P}_y = |\vec{P}| \times \sin 50^\circ \vec{j} = 0,766P \vec{j}$$

Planteada la suma de las componentes cartesianas de ambos vectores, es evidente que si el cuerpo sube verticalmente, la suma de las componentes en x debe dar cero (el cuerpo no se traslada horizontalmente) y la resultante sobre el eje y debe ser de 20 kgf como dice el enunciado, por lo que:

En el eje x:

$$\vec{A}_x + \vec{P}_x = 0 \Rightarrow (-0,342A + 0,643P) \vec{i} = 0$$

Trabajando con los módulos:  $0,643P = 0,342A$

(1)

En el eje y:  $\vec{A}_y + \vec{P}_y + \vec{Q} = 20 \vec{j} \Rightarrow (0,939A + 0,766P - 100) \vec{j} = 20 \vec{j}$

Trabajando con los módulos:

$$0,939A + 0,766P = 120 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado en (1) y (2) encontramos que:

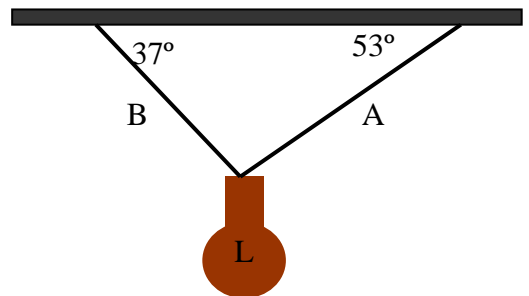
$$|\vec{A}| = 89,1 \text{ kgf}$$

$$|\vec{P}| = 47,4 \text{ kgf}$$

#### Algunos ejercicios para hacer:

4- Una lámpara cuelga del techo sujeta por dos cadenas, tal y como muestra el esquema. La lámpara pesa 15 kgf y se encuentra en reposo. Indicar los valores de las fuerzas que realizan las cadenas para sostenerla. (Tenga en cuenta que para que la lámpara no se mueva, la suma de fuerzas debe ser cero)

Rta:  $|\vec{A}| = 12 \text{ kgf}$   $|\vec{B}| = 9 \text{ kgf}$



5- Juan está feliz hamacándose en su columpio nuevo. Cuando se encuentra en la posición más alta, las sogas que sostienen el asiento forman un ángulo de  $45^\circ$  con respecto a la vertical. Si Juan pesa 40 kgf; ¿Qué fuerza deberá hacer cada soga para sostenerlo en ese punto?

Rta: Cada soga deberá hacer un esfuerzo de 28,3 kgf para sostenerlo.

6- ¿Cuál es el módulo de la suma  $\vec{S} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ?

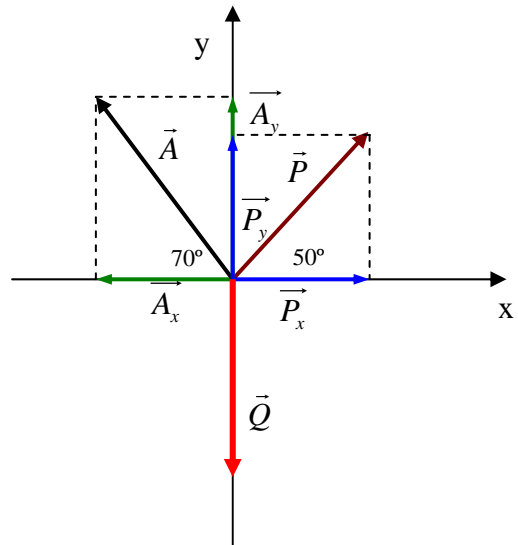
Rta:  $|\vec{S}| = \sqrt{3}$

7- Encuentre un vector que tenga la misma dirección y sentido que el resultado de la suma del ejercicio anterior, pero que tenga módulo 1.

8- Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que  $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .

9- Comparando las respuestas de los ejercicios 7 y 8, indique si se verifica que un vector

unitario cualquiera es:  $\vec{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ .





## PRODUCTO DE VECTORES EXPRESADOS MEDIANTE COMPONENTES CARTESIANAS.

Calcular productos entre vectores implica conocer sus módulos y el ángulo entre ellos, o bien tratar de resolver teniendo los mismos expresados como la suma de las componentes cartesianas. Si consideramos que el producto escalar de los versores fundamentales, vemos que:

$$\begin{aligned} a) \vec{i} \bullet \vec{i} &= |\vec{i}| \times |\vec{i}| \times \cos 0^\circ = 1 & d) \vec{j} \bullet \vec{i} &= |\vec{j}| \times |\vec{i}| \times \cos 90^\circ = 0 \\ b) \vec{i} \bullet \vec{j} &= |\vec{i}| \times |\vec{j}| \times \cos 90^\circ = 0 & e) \vec{j} \bullet \vec{j} &= |\vec{j}| \times |\vec{j}| \times \cos 0^\circ = 1 \\ c) \vec{i} \bullet \vec{k} &= |\vec{i}| \times |\vec{k}| \times \cos 90^\circ = 0 & f) \vec{j} \bullet \vec{k} &= |\vec{j}| \times |\vec{k}| \times \cos 90^\circ = 0 \\ g) \vec{k} \bullet \vec{i} &= |\vec{k}| \times |\vec{i}| \times \cos 90^\circ = 0 \\ k) \vec{k} \bullet \vec{j} &= |\vec{k}| \times |\vec{j}| \times \cos 90^\circ = 0 \\ l) \vec{k} \bullet \vec{k} &= |\vec{k}| \times |\vec{k}| \times \cos 0^\circ = 1 \end{aligned}$$

De donde se desprende que los únicos productos que no se anulan son los de versores colineales (recuerde la condición de perpendicularidad mencionada al tratar el tema). Esto hace que, si queremos multiplicar escalarmente dos vectores expresados como la suma de sus componentes cartesianas, la cosa se reduzca a:

Dados:  $\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  y  $\vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ ; el producto escalar  $\vec{A} \bullet \vec{B}$  será:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \bullet (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

Como al aplicar la propiedad distributiva, los productos entre componentes no colineales se hacen cero, al final resulta:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{a}_x \bullet \vec{b}_x + \vec{a}_y \bullet \vec{b}_y + \vec{a}_z \bullet \vec{b}_z$$

Con lo que la operación resulta mucho más sencilla.

Veamos algunos ejercicios de ejemplo:

- 1- En base a lo encontrado en el ejercicio anterior, resuelva el producto escalar entre los vectores:

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

Solución:

Aplicando lo analizado antes, como los productos escalares entre vectores perpendiculares son nulos, nos queda:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 3\vec{i} \bullet (-2\vec{i}) + 2\vec{j} \bullet 3\vec{j} + (-\vec{k}) \bullet (-2\vec{k}) \quad \text{De donde:} \quad \vec{A} \bullet \vec{B} = 2$$

- 2- ¿Cuál es el ángulo entre los vectores:  $\vec{C} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  y  $\vec{D} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ?

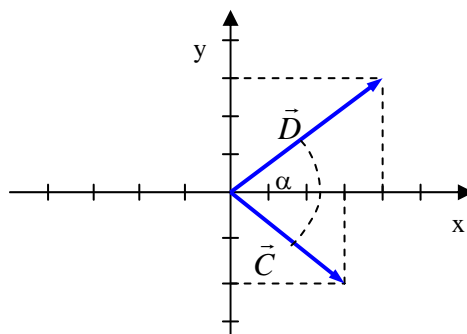
Solución:

Comenzamos construyendo un gráfico que nos de una idea del ángulo.

Sabemos que el producto escalar es:

$\vec{C} \bullet \vec{D} = |\vec{C}| \times |\vec{D}| \times \cos \alpha$ , por lo que, si conocemos el valor del producto y los módulos de los vectores, podemos calcular el ángulo entre ambos.

Calculemos primero el valor del producto escalar.



Como ya hemos hecho:  $\vec{C} \cdot \vec{D} = 3\vec{i} \cdot 4\vec{i} + (-2\vec{j}) \cdot 3\vec{j} = 6$  (a)

Calculemos ahora los valores de los módulos de los vectores:

$$|\vec{C}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = 3,6$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad (b)$$

Despejando de la expresión de producto escalar nos queda:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{C} \cdot \vec{D}}{|\vec{C}| \times |\vec{D}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{6}{3,6 \times 5} = 0,333 \text{ De donde } \alpha = 70^\circ 31'$$

3- Calcule el ángulo entre los vectores:  $\vec{B} = (-2\vec{i} + 4\vec{j})\text{cm}$  y  $\vec{C} = (4\vec{i} + 3\vec{j})\text{cm}$ .

Solución:

De igual manera que antes, el producto escalar entre ambos es:

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (-2\vec{i}) \cdot 4\vec{i} + 4\vec{j} \cdot 3\vec{j} = 4\text{cm}^2 \quad (a)$$

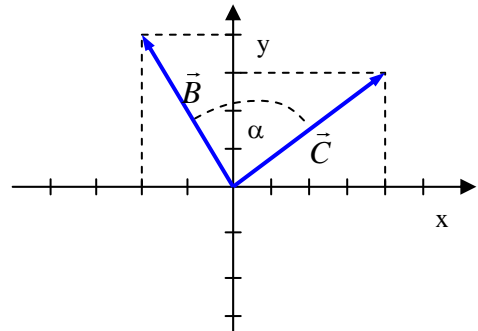
Los módulos de los vectores:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 4,47\text{cm}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{cm} \quad (b)$$

De donde:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{B}| \times |\vec{C}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{4,47 \times 5} = 0,1789 \text{ De donde } \alpha = 79^\circ 41'$$



4- Dados los vectores:  $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  y  $\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ , determine el valor del escalar  $\alpha$  tal que el vector  $\vec{R} = \vec{A} - \alpha\vec{B}$  resulte perpendicular a  $\vec{A}$ .

Solución:

Hagamos la cuenta  $\vec{R} = \vec{A} - \alpha\vec{B}$ :  $\vec{R} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - \alpha(4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k})$  esto da:

$$\vec{R} = (1 - 4\alpha)\vec{i} + (2 - 5\alpha)\vec{j} + (3 - 6\alpha)\vec{k} \quad (a)$$

Para que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{R}$  sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero, por lo que podemos escribir esa ecuación:

$$\vec{A} \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot ((1 - 4\alpha)\vec{i} + (2 - 5\alpha)\vec{j} + (3 - 6\alpha)\vec{k}) = 0$$

Como aquellos productos entre componentes no colineales se anulan, la expresión nos queda:

$$(1 - 4\alpha) \times 1 + (2 - 5\alpha) \times 2 + (3 - 6\alpha) \times 3 = 0 \text{ Resolviendo: } 14 - 32\alpha = 0 \text{ De donde } \alpha = \frac{7}{16}$$

### Algunos ejercicios para hacer:

1- Si  $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$  y  $\vec{B} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ , a) Determine el valor de su producto escalar. b) Encuentre el valor de  $|\vec{A}|$  y de  $|\vec{B}|$ . c) Encuentre el ángulo entre ambos vectores.

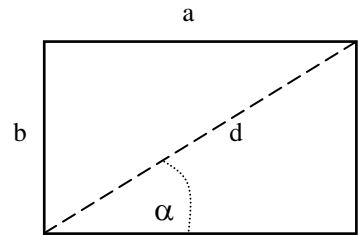
Rta: a) 13 b)  $|\vec{A}| = 7$   $|\vec{B}| = 5,1$  c)  $68^\circ 38'$

2- Utilizando el producto escalar entre vectores, determine el ángulo entre los vectores  $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$  y  $\vec{B} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .

Rta:  $168^\circ 30'$

3- Determine el ángulo  $\alpha$  entre la diagonal de un rectángulo de lados  $a = 5 \text{ cm}$  y  $b = 3 \text{ cm}$ , y su lado  $a$ . (ver esquema).

Rta:  $30^\circ 56'$



4- Se tienen tres vectores de valores:

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j}; \vec{B} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ y } \vec{C} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$$

Verificar que se cumple que:  $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$

Para el caso del producto vectorial, si hacemos los correspondientes a los versores fundamentales obtenemos:

$$a) \vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| \times |\vec{i}| \times \sin 0^\circ = 0$$

$$d) \vec{j} \times \vec{i} = (|\vec{j}| \times |\vec{i}| \times \sin 90^\circ)(-\vec{k}) = -\vec{k}$$

$$b) \vec{i} \times \vec{j} = (|\vec{i}| \times |\vec{j}| \times \sin 90^\circ)\vec{k} = \vec{k}$$

$$e) \vec{j} \times \vec{j} = |\vec{j}| \times |\vec{j}| \times \sin 0^\circ = 0$$

$$c) \vec{i} \times \vec{k} = (|\vec{i}| \times |\vec{k}| \times \sin 90^\circ)(-\vec{j}) = -\vec{j}$$

$$f) \vec{j} \times \vec{k} = (|\vec{j}| \times |\vec{k}| \times \sin 90^\circ)\vec{i} = \vec{i}$$

$$g) \vec{k} \times \vec{i} = (|\vec{k}| \times |\vec{i}| \times \sin 90^\circ)\vec{j} = \vec{j}$$

$$k) \vec{k} \times \vec{j} = (|\vec{k}| \times |\vec{j}| \times \sin 90^\circ)(-\vec{i}) = -\vec{i}$$

$$l) \vec{k} \times \vec{k} = |\vec{k}| \times |\vec{k}| \times \sin 0^\circ = 0$$

Con lo que, los productos entre componentes cartesianas colineales es cero (recuerde la condición de paralelismo tratada anteriormente).

Esto hace que resulte mucho más fácil encontrar un producto vectorial con los vectores expresados como la suma de sus componentes cartesianas que calculando módulos y ángulos entre ellos.

Genéricamente, podemos decir que dados  $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  y  $\vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ , el producto vectorial entre ambos se podrá calcular como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_x\vec{i} \times b_x\vec{i} + a_x\vec{i} \times b_y\vec{j} + a_x\vec{i} \times b_z\vec{k} + a_y\vec{j} \times b_x\vec{i} + a_y\vec{j} \times b_y\vec{j} + a_y\vec{j} \times b_z\vec{k} + a_z\vec{k} \times b_x\vec{i} + a_z\vec{k} \times b_y\vec{j} + a_z\vec{k} \times b_z\vec{k}$$

Realizando los productos:

$$a_x\vec{i} \times b_x\vec{i} = 0$$

$$a_y\vec{j} \times b_x\vec{i} = -a_yb_x\vec{k}$$

$$a_z\vec{k} \times b_x\vec{i} = a_zb_x\vec{j}$$

$$a_x\vec{i} \times b_y\vec{j} = a_xb_y\vec{k}$$

$$a_y\vec{j} \times b_y\vec{j} = 0$$

$$a_z\vec{k} \times b_y\vec{j} = -a_zb_y\vec{i}$$

$$a_x\vec{i} \times b_z\vec{k} = -a_xb_z\vec{j}$$

$$a_y\vec{j} \times b_z\vec{k} = a_yb_z\vec{i}$$

$$a_z\vec{k} \times b_z\vec{k} = 0$$

Agrupando los productos que dan vectores colineales nos queda:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

Compruebe ud. que, para el caso de dos vectores en el plano,  $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$  y  $\vec{B} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$  el producto vectorial puede calcularse como:

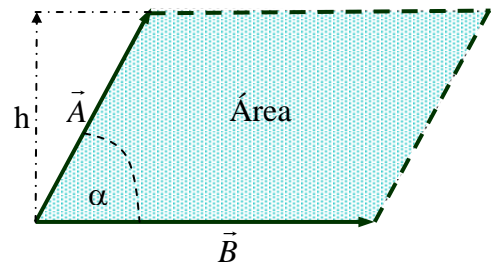
$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

Veamos algunos ejemplos:

1- Se tienen dos vectores como los representados en el esquema; Encuentre la expresión que permita calcular el área de la superficie encerrada en el cuadrilátero, que tiene por lados a ambos vectores. ¿Con qué puede comparar la expresión final del área?

**Solución:**

El área de la superficie de un paralelogramo es base por altura. La longitud de la base coincide con  $|\vec{B}|$ ,



mientras que la altura puede calcularse por trigonometría como:  $h = |\vec{A}| \times \text{sen} \alpha$ . El área queda entonces como:

$$S = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \times \text{sen} \alpha$$

Pero el segundo miembro es nada más ni nada menos que el valor del módulo del vector resultante del producto vectorial entre , por lo que podemos decir que el valor del área del paralelogramo que tiene por lados a los dos vectores coincide con el módulo de su producto vectorial. Matemáticamente:

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

2- Los tres vectores del esquema suman cero. Encuentre los productos:  $\vec{A} \times \vec{B}$ ;  $\vec{A} \times \vec{C}$  Y  $\vec{B} \times \vec{C}$

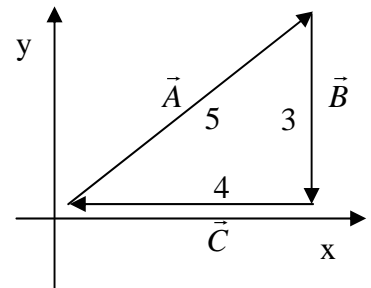
**Solución:** Tomando en cuenta el esquema y el sistema de coordenadas propuesto, podemos expresar a cada uno de los vectores como:

$$\vec{A} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{B} = -3\vec{j} \quad \text{Efectuando los productos vectoriales solicitados, y}$$

$$\vec{C} = -4\vec{i}$$

de acuerdo con lo visto antes:



$$\vec{A} \times \vec{B} = 4\vec{i} \times (-3\vec{j}) - 3 \times 0 = -12\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = 4 \times 0 - 3 \times (-4) = 12\vec{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = 4 \times 0 - (-4) \times (-3) = -12\vec{k}$$

3- Se tiene un vector  $\vec{A} = -3,2\vec{i} + 2,4\vec{j}$  y el vector  $\vec{B}$  perteneciente al plano x-y, de módulo 5,2. El ángulo que forma este último con el semieje positivo de las x es de  $120^\circ$ . Encuentre  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ .

**Solución:** Este problema admite dos caminos para su resolución: a) Podemos calcular el módulo de  $\vec{A}$  y el ángulo entre ambos vectores para luego efectuar el producto vectorial, o bien b) Podemos calcular los valores de las componentes cartesianas de  $\vec{B}$  y expresarlo como la suma vectorial de ellas, calculando entonces el producto vectorial correspondiente, siendo este el camino más sencillo.

Probemos entonces de hacerlo así. Calculando las componentes de  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}_x = |\vec{B}| \times \cos 120^\circ = -2,6\vec{i}$$

$$\vec{B}_y = |\vec{B}| \times \text{sen} 120^\circ = 4,5\vec{j}$$

de donde:

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = (-3,2 \times 4,5 - 2,4 \times (-2,6)) \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -8,16\vec{k}$$

## RESUMEN:

Un vector se puede definir como un par ordenado de puntos pertenecientes a una recta, el primer elemento del par se denomina *origen* del vector, y el segundo es el *extremo*. Representamos a los vectores en forma gráfica con una flecha. Distinguimos tres elementos que lo caracterizan: Dirección, sentido y módulo.

De acuerdo con la movilidad que presentan los distintos vectores, los clasificamos en: *fijos, deslizantes y libres*.

Representando los puntos del par ordenado en un sistema de referencia, pudimos dibujar vectores atados a ese sistema y podemos calcular el módulo del mismo y el ángulo que forma con el semieje positivo de las x como:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{y} \quad \text{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

siendo el origen del vector definido como:  $O = (x_1; y_1)$ , y el extremo:  $P = (x_2; y_2)$ .

Los vectores operan de manera diferente a los escalares; esto implica que la suma, la resta y los productos de vectores requieren procedimientos que les son específicos. Se pueden sumar vectores en forma gráfica por dos métodos: La regla del paralelogramo y la regla del polígono. También se pueden restar vectores usando los mismos procedimientos, teniendo en cuenta que una resta de vectores no es más que la suma de uno con el opuesto del otro.

En cuanto a los productos, podemos multiplicar:

**Un vector por un escalar**, lo que nos da otro vector cuyo módulo aparece modificado aumentando o disminuyendo tantas veces como el escalar lo indique, y cuyo sentido aparecerá invertido o no, según sea negativo o positivo el escalar.

**Escalar de vectores**, definido como:  $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ . Nótese que el producto escalar de vectores, como su nombre lo indica, da por resultado un escalar. Algunos conceptos físicos, como el de trabajo, se define a partir del producto escalar de vectores<sup>8</sup>.

**Vectorial**, cuyo resultado es otro vector, con las siguientes características: Dirección perpendicular al plano formado por los vectores que se multiplican; módulo resultado de:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen} \alpha \quad \text{y} \quad \text{sentido obtenido de aplicar la regla de la mano derecha ( o regla del$$

tirabuzón, o regla del tornillo). Es interesante de ver que el producto vectorial no es conmutativo (el producto escalar sí lo es), ya que al invertir los factores se invierte el sentido del vector resultado. En un movimiento circular, el vector que representa a la velocidad angular<sup>9</sup> se define en física utilizando esta operación.

Análogamente a lo planteado en el producto de un vector por un escalar, la división de un vector por un escalar modifica el módulo y eventualmente el sentido del vector resultado (conservará el sentido original si el escalar es positivo, lo invertirá si es negativo). Un punto importante surge al plantear la división de un vector por un escalar igual a su propio

<sup>8</sup> El trabajo se define en física como el producto escalar entre la fuerza aplicada y el desplazamiento producido. El concepto de trabajo, como muchos otros, difiere en física de la concepción del término que se tiene en el uso diario.

<sup>9</sup> Así como la velocidad lineal tiene un módulo que puede calcularse como el módulo del desplazamiento a través del tiempo, la velocidad angular en un movimiento circular posee también un módulo que puede definirse como la variación de posición angular a través del tiempo.

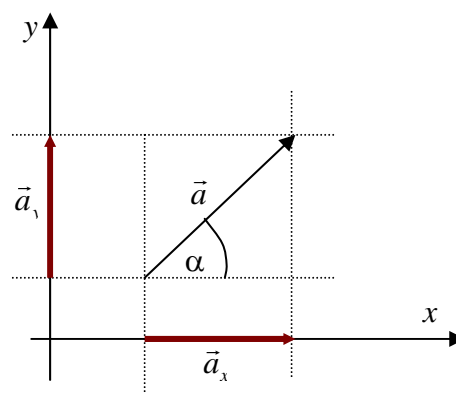
módulo; en ese caso, siempre se obtiene un vector de módulo uno, que conserva la dirección y el sentido del original. El vector de esas características recibe el nombre de

*versor*, y la expresión matemática que nos permite expresarlo es:  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}$ . Los versores

resultan muy útiles ya que nos permiten expresar a cualquier vector como el producto de un escalar que represente su módulo por ellos. Así, por ejemplo, al vector  $\vec{a}$  podemos

expresarlo como:  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}$ . Partiendo de esta forma de escribir vectores, podremos definir luego vectores como la suma de sus componentes cartesianas. Versores importantes son aquellos que se encuentran sobre los ejes cartesianos; estos tienen simbología propia, y son: Para el eje +x: versor i ( $\vec{i}$ ); para el eje +y: versor j ( $\vec{j}$ ) y para el eje +z: versor k ( $\vec{k}$ )

Proyectar un vector sobre un eje implica obtener un segmento cuyo módulo se puede calcular a partir de sencillos conceptos de trigonometría. Si proyectamos al vector sobre los ejes cartesianos, y a los segmentos resultantes los multiplicamos por los versores correspondientes, obtendremos las llamadas *componentes cartesianas* del vector. **Todo vector puede expresarse entonces como la suma de sus componentes cartesianas.**



Simbólicamente:  $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$ . Puede calcularse a

partir de las componentes el módulo del vector y el ángulo que forma con alguno de los ejes utilizando sencillos conceptos matemáticos tales como el teorema de Pitágoras y alguna función trigonométrica<sup>10</sup>.

Utilizando la expresión de un vector como la suma de sus componentes cartesianas, aprendimos el procedimiento para sumar y restar analíticamente vectores, así como también cómo resolver los diferentes productos (de un vector por un escalar, escalar entre vectores y vectorial).

Todo esto conforma una muy buena caja de herramientas matemáticas que nos serán muy útiles en el estudio de conceptos importantes de la física.

<sup>10</sup> Por lo general, la función tangente.

## APÉNDICE 1: ESCALAS.

Alguna vez nos ha tocado consultar una guía de calles buscando una dirección cualquiera, o un mapa de rutas con la finalidad de orientarnos para saber cómo llegar a un lugar determinado. **Sabemos que las calles o rutas que figuran en el dibujo no son exactamente como las calles y rutas reales.**

Estos esquemas, mapas, etc., están dibujados de manera de mantener PROPORCIONALMENTE las formas de los objetos reales que representan. Están dibujados utilizando una ESCALA.

- **¿Qué es una escala?**

Es simplemente RELACIÓN CONVENCIONAL, donde una magnitud dibujada representa otra que, por resultar demasiado grande o muy pequeña resulta difícil de dibujar del tamaño real.

A nadie se le ocurriría llevar consigo planos de calles donde cada cuadra midiera 129,9 m; resultaría imposible de acarrear. Pero si convenimos que cada cuadra real la dibujaremos de, por ejemplo, 5 mm; entonces podremos tener un plano fiable para establecer distancias y formas, de un tamaño cómodo de transportar.

Podremos, inclusive, calcular distancias simplemente con medirlas en el plano y luego reconvertirlas de acuerdo con la convención fijada.

Esas escalas se utilizan cada vez que se pretende construir dibujos o gráficos en los que importa conservar la forma, además de poder leer valores en ellos. Se pueden construir escalas donde se representen magnitudes usando dibujos del mismo valor numérico, aunque en distinta unidad, como por ejemplo las longitudes en Km, que dibujadas en un plano se representan en mm (el mismo valor numérico); también usando relaciones en que los valores reales no coincidan con los usados en su representación (como en el ejemplo en que una cuadra de 129,9 m la representamos mediante una longitud de 5 mm); o bien relacionando diferentes magnitudes como por ejemplo las escalas de temperatura realizadas por los meteorólogos, donde las temperaturas se representan en cm.

Estudiaremos, en este apunte, la manera de construir escalas, efectuar lecturas de esquemas y gráficos representados en escala, y elegir convenientemente una escala para representar un esquema o gráfico determinado.

Una escala es, entonces:

$$Escala = \frac{\text{Tamaño del dibujo}}{\text{Tamaño real}}$$

Lo que resulta, en definitiva, una relación entre el tamaño de lo dibujado y el real de lo que se dibuja.

- **¿Cómo dibujar algo real utilizando una escala?**

Tomemos un ejemplo sencillo:

Supongamos que queremos dibujar un rectángulo de 9 m de base por 8,1 m de altura en una hoja de papel común.

Podemos utilizar una convención en la cual, cada metro de longitud lo representemos con otra longitud de 1 cm, entonces dibujaremos el rectángulo de 9 cm de base y 8,1 cm de altura.

Las cuentas que nos permiten saber las dimensiones del dibujo, se pueden efectuar de muchas maneras, siendo la más sencilla, la resolución mediante una regla de tres simple, así:

a) Cálculo de la base:

Para representar 100 cm.....dibujar 1 cm.

Para representar 900 cm.....dibujar x cm.

$$x = \frac{900 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 9 \text{ cm}$$

b) Cálculo de la altura:

Para representar 100 cm.....dibujar 1 cm.

Para representar 810 cm.....dibujar x cm.

$$x = \frac{810 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 8,1 \text{ cm}$$

Entonces, el rectángulo tendrá lados de 9 cm y 8,1 cm, tal y como habíamos planteado al principio; y conserva la forma real, demasiado grande como para que lo podamos representar cómodamente del tamaño verdadero.

Intentemos ahora el problema inverso: "cómo extraer datos de un esquema realizado en escala". Supongamos que queremos conocer cuánto mide cada diagonal del rectángulo real mencionado más arriba, pero sólo disponemos de su dibujo en escala. Valiéndonos de la regla de tres simple, podemos obtener esos valores así:

1. Medimos las diagonales en el dibujo: El resultado obtenido es:  $D = 12 \text{ cm}$ .
2. Planteamos la regla de tres de manera de convertir ese valor en escala a la cantidad real:

Cuando dibujamos 1 cm.....representamos 100 cm

Cuando dibujamos 12 cm.....Representamos x cm

$$x = \frac{12 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 1200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$$

Otra forma, quizá más cómoda de trabajar con las escalas, es a partir de la fórmula que mencionamos primero:

$$E = \frac{\text{Medida dibujo}}{\text{Medida real}} = \frac{D}{R}$$

De esta relación deducimos que:

$$R = \frac{D}{E}$$

O bien que:

$$D = R \times E$$

Entonces:

**Si queremos construir un determinado dibujo en base a una escala conocida, bastará con tomar cada una de las medidas reales que se quieran dibujar y MULTIPLICARLAS POR LA ESCALA.**

**Si queremos conocer los valores reales de algunas medidas tomadas en un dibujo construido en escala, bastará con medir sobre el dibujo y luego DIVIDIR CADA MEDICIÓN POR LA ESCALA.**

En el ejemplo del rectángulo, si queremos dibujar el mismo en una escala de:



$$E = \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$$

Determinar los valores de los lados en función de lo expuesto sería así:

a) Cálculo de la base b:

$$b = 900 \text{ cm} \times E = 900 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 9 \text{ cm}$$

b) Cálculo de la altura a:

$$a = 810 \text{ cm} \times E = 810 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 8,1 \text{ cm}.$$

Y si queremos el valor real de la diagonal:

$$D = \frac{12 \text{ cm}}{E} = \frac{12 \text{ cm}}{\frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}} = 1200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$$

Para fijar ideas, le proponemos los siguientes ejercicios:

Dibuje un rectángulo de 15 m de base y 9 m de altura en escala, utilizando la del ejemplo.

1. Tome un mapa escolar de Sudamérica. ¿Cuál es la escala en que está dibujado? ¿Podría escribirla de otra manera?
2. Utilizando la escala del mapa; ¿puede decir qué distancia aproximada hay entre Buenos Aires y Río de Janeiro?
3. ¿Y entre Buenos Aires y las islas Malvinas?
4. ¿Desde Lima hasta Santiago de Chile?

#### • ¿Cómo elegir una escala?

La construcción de un dibujo, debiendo fijar previamente una escala de trabajo es el problema con el que nos enfrentamos más a menudo. Se busca siempre al construir dibujos o gráficos en escala, hacerlos lo más grande que permita la hoja que se utiliza ya que, cuanto más grande la escala (y por lo tanto el dibujo), mayor precisión tendrán las medidas que se tomen en el esquema. Esto supone que la relación:

<i>VALOR DIBUJADO</i>
<i>VALOR REAL</i>

Sea lo máximo compatible con el tamaño de la hoja a usar (se podría decir, tal vez decir, que la escala debe ser lo más grande posible).

Se puede elegir una escala muy grande entonces, para favorecer la precisión en las lecturas dentro del gráfico o esquema, pero puede ocurrir en ese caso que, al empezar a dibujar nos encontremos con que parte del esquema no entre en la hoja. Todo el trabajo hecho hasta ese momento se pierde (para nuestro fastidio) y hay que recomenzar la tarea.

Probamos entonces, para tener la seguridad de que todo el dibujo entrará en la hoja, con una escala lo más pequeña posible, y en ese caso puede sucedernos que una vez terminado el mismo, nos quede tan pequeño que sea imposible tomar medidas de alguna precisión en él.

¿Cuál es la solución?

Supongamos que tenemos que dibujar en escala un rectángulo de 1,5 m por 2,5 m; en una hoja de 30,5 cm de largo por 22,5 cm de ancho. Evidentemente debemos dejar un espacio para hacer las anotaciones que sean pertinentes, y a la vez construir el dibujo lo más grande posible a fin de poder tener lecturas fiables de él. Para tener la seguridad de poder dibujar el mayor rectángulo en escala que entre en la hoja, sin estar ensayando con esquemas tentativos, procederemos así:

- Tomamos la mayor de las medidas que tenemos que representar. En este caso, la base del rectángulo, que es de 2,5 m.

- Tomamos la mayor medida que nos permita (o queramos) dibujar la hoja en su menor lado, en este caso sería de 20 cm (dejando un pequeño espacio para las anotaciones).
- Con estas dos medidas construiremos nuestra escala<sup>11</sup>:

$$E = \frac{20 \text{ cm}}{2,50 \text{ m}} = \frac{20 \text{ cm}}{250 \text{ cm}} = \frac{2}{25}$$

Quiere decir que cada 2 cm dibujados, representarán 25 cm reales, o sea 0,25 m. Con esta escala, calcularemos los valores de la base y la altura del rectángulo a dibujar:

$$b = 250 \text{ cm} \times E = 250 \text{ cm} \times \frac{2}{25} = 20 \text{ cm}$$

$$a = 150 \text{ cm} \times E = 150 \text{ cm} \times \frac{2}{25} = 12 \text{ cm}$$

Con lo que tendremos un dibujo en escala del rectángulo, lo bastante grande como para evitar que las incertezas que se cometan al medir y calcular no invaliden el trabajo efectuado por falta de precisión.

Se puede también aumentar el tamaño del dibujo aprovechando más la hoja, si fijamos escalas diferentes para cada lado del rectángulo. Dejamos esta inquietud para quienes deseen intentarlo.

Le proponemos como ejercicio, plantear una escala para dibujar el mismo rectángulo en la hoja de su cuaderno, dibujarlo e indicar, tomando lecturas en el dibujo, cuánto mide en realidad cada diagonal. Si llega a establecer un valor cercano a los 2,9 m, es que ha realizado bien las cosas.

## GRÁFICOS EN ESCALA

Cuando se trata de volcar varios datos de forma que se facilite la lectura y se tenga una idea general e de la interdependencia entre los valores representados, se recurre a los gráficos cartesianos.

La única manera de poder tomar lecturas y establecer relaciones entre los valores representados en un gráfico, es que dichas representaciones se encuentren en escala. Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, lo manifestado en lo referente a escalas a la construcción del gráfico de un movimiento.

Al medir los desplazamientos de un vehículo a través del tiempo, se han obtenido los siguientes datos:

medic.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
desplazam . (m)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400
tiempo (s)	0	10	20 s	30	40	50	60	70	80

Para poder representar estos valores en un sistema de ejes cartesianos, debemos primero determinar las escalas convenientes:

Si hacemos el gráfico en una hoja de papel milimetrado tamaño oficio, la cuadrícula de una hoja de este tipo tiene 30 cm de base ( la trabajaremos apaisada), y 20 cm de altura.

Dejaremos 2 cm de margen para realizar anotaciones, con lo que nos queda un espacio de 28 cm por 18 cm.

Representaremos verticalmente ( en el eje Y) los valore de los desplazamientos, y horizontalmente (eje X) los tiempos respectivos.

Para mejor aprovechamiento de la hoja, fijaremos una escala diferente para cada eje, de la forma en que ya vimos:

<sup>11</sup> Estos valores son representativos, en general conviene usar valores enteros para las escalas, por razones de comodidad, en el ejemplo arriba expuesto, la escala que mejor se adaptaría sería de 1/20 ó 1/15.

Escala para los desplazamientos:

$$E_d = \frac{16 \text{ cm}}{2400 \text{ m}} = \frac{1 \text{ cm}}{150 \text{ m}}$$

Escala para los tiempos:

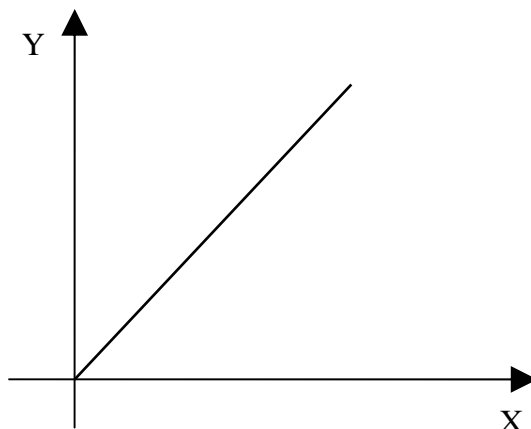
$$E_t = \frac{26,6 \text{ cm}}{30 \text{ s}} = \frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ s}}$$

Multiplicando cada uno de los valores de los desplazamientos y los tiempos, por la escala respectiva, confeccionamos ahora la siguiente tabla:

ESCALA DE DESPLAZAMIENTOS Y TIEMPOS:

medic.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
desplaza m.	0 cm	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm	11,25 cm	13,5 cm	14 cm	16 cm
tiempos	0 cm	3,3 cm	6,6 cm	10 cm	13,3 cm	16,6 cm	20 cm	23,3 cm	26,6 cm

Con estos valores dibujamos el gráfico:



Le proponemos como ejercitación:

1. Construya el gráfico del ejemplo en escala en una hoja de papel milimetrado tamaño oficio.
2. Construya en otra hoja del mismo tamaño, otro gráfico del movimiento reduciendo una de las escalas a la cuarta parte. ¿Es conveniente eso? ¿Por qué?
3. Tomando las lecturas adecuadas en el primer gráfico, determine el desplazamiento del vehículo a los 7 s de iniciado el movimiento.
4. Con los valores de la siguiente tabla, construya los gráficos correspondientes a los desplazamientos a través del tiempo y las velocidades a través del tiempo.

tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
veloc. (m/s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160
desplazam. (m)	0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400

5- Se pretende construir una gráfica tomando como base la siguiente tabla de valores, en la que se encuentran registradas las posiciones ocupadas por un automóvil a través del tiempo.

Posición (Km)	10	25	40	55	70	85	100	115	130
tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

6- Se posee una hoja de papel milimetrado de 21 cm de ancho por 27 cm de alto.

- a) Construya el gráfico utilizando una escala adecuada para cada eje.
- b) Indique si ambas magnitudes se encuentran directamente proporcionales relacionadas.

7 - En un mapa escolar de nuestra República, la escala a la que ha sido dibujado indica:

$$E = \frac{1}{20.000.000}.$$

- a) Si la distancia Buenos Aires - Mar del Plata es de 400 Km; qué longitud la representa en el mapa?
- b) Entre Buenos Aires y Posadas, el mapa registra una distancia de 4 cm, cuál es la distancia real entre ambas ciudades?
- c) Si utilizamos una regla que nos permite una apreciación mínima de 1 mm para efectuar lecturas en el mapa, cuál es la menor distancia que podemos apreciar en él?

8 - En un mapa construido en una escala de  $E = \frac{1}{9.100.000}$ , la distancia entre dos paralelos distanciados  $2^\circ$ , es de 3,5 cm.

- a)Cuál es la distancia real entre ambos paralelos?
- b) Qué distancia en Km hay en una separación de  $1^\circ$ ?

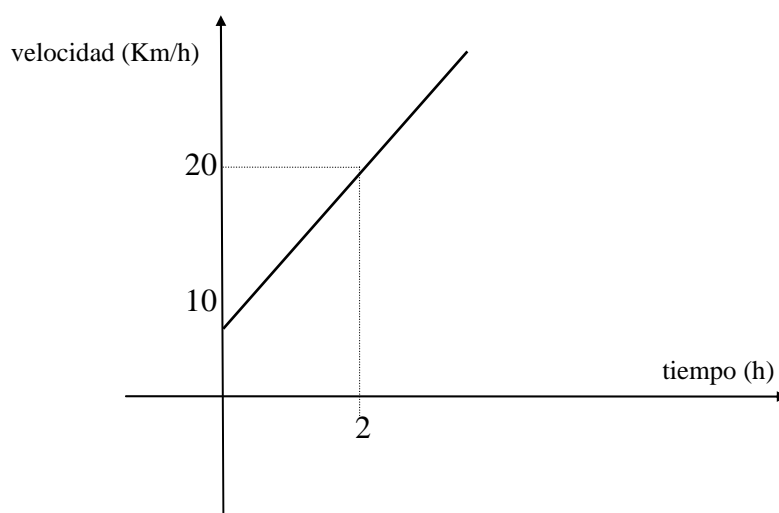
9 - El siguiente gráfico ha sido construido en base a los valores de las velocidades de un automóvil registradas a través del tiempo, pero el alumno que lo confeccionó ha olvidado colocar la escala.

- a) Determine la escala utilizada en cada eje. Son iguales?

b) Qué velocidad posee a las  $4^h 30^m$  de marcha?

c) Si se utiliza una regla graduada en mm, cuál es la menor lectura de velocidad posible en el gráfico?

d) Y de tiempo?



**NOTA:**

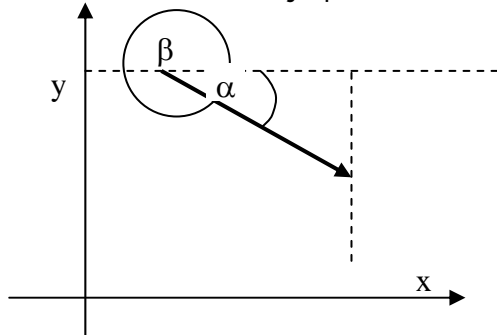
*No todas las representaciones gráficas tienen forma de recta o semirrecta; de acuerdo con la ley que corresponda a la representación, la forma será diferente. En el cuarto ejercicio, por ejemplo, la gráfica es curva, tomando la forma de una rama de parábola.*  
[volver.](#)

## APÉNDICE 2: Cómo referir ángulos al semieje positivo de las x:

a. Comience siempre por un esquema. El ubicar las cosas en un dibujo más o menos proporcionado de acuerdo con los datos ayuda a visualizar el problema. Por ejemplo:

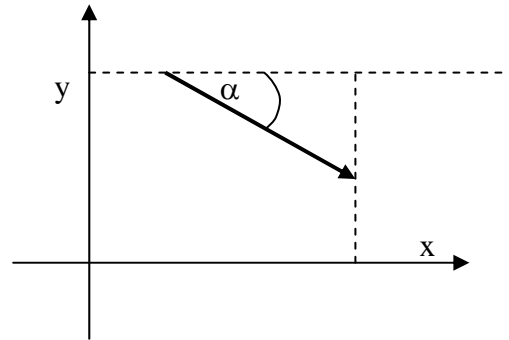
b. Marque en el esquema el ángulo calculado de acuerdo con los datos.

c. Marque el ángulo referido al eje que le interesa (en este caso, el semieje positivo de las x).



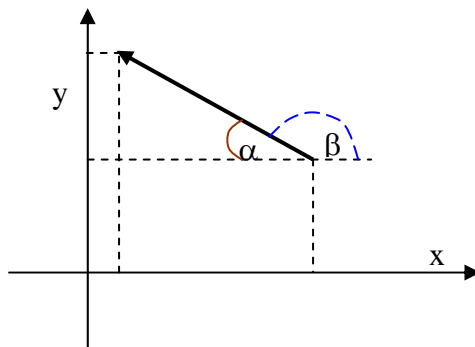
Fijese qué relación existe entre el ángulo marcado y el que desea averiguar. En el caso del ejemplo, para un ángulo que se encuentra en el cuarto cuadrante, se ve claramente en el dibujo que el valor de  $\beta$  se puede obtener como:

$$\beta = 360^\circ - \alpha$$



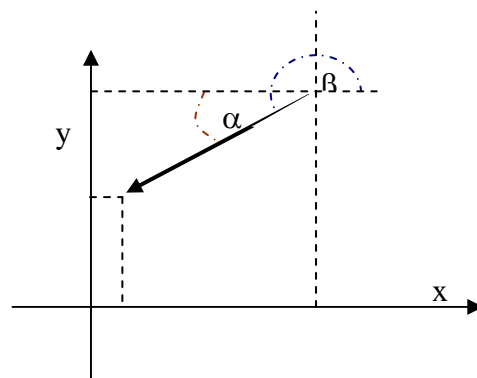
Considerando los casos restantes:

Ángulo referido al eje x, que está en el segundo cuadrante: Se puede observar en el esquema que  $\beta = 180^\circ - \alpha$ .



Ángulo referido al eje x, que está en el tercer cuadrante: Como muestra el esquema, el ángulo  $\beta$  se puede obtener como:

$$\beta = 180^\circ + \alpha$$



[volver](#)

### AUTOEVALUACIÓN

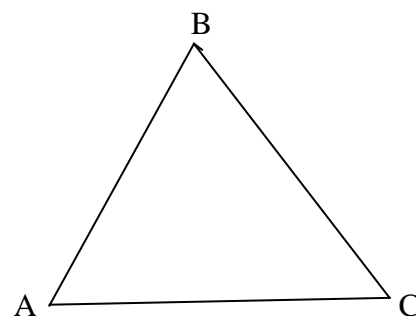
*Esta evaluación tiene por único propósito que ud. pueda medir de alguna manera el grado de fijación de los conocimientos tratados en el módulo. Todas las preguntas tienen cinco opciones, de las cuales sólo una es correcta. Se recomienda que antes de contestar:*

- a) Lea atentamente tratando de interpretar correctamente la consigna.*
- b) plantee en un papel aparte ayudándose con gráficos cuando la ocasión lo requiera.*
- c) No dude en consultar la teoría desarrollada en el apunte, también se puede aprender respondiendo evaluaciones y esa es la intención.*
- d) Controle los resultados utilizando la hoja de respuestas, recién después de haber respondido y no antes (no haga trampa). De nada vale fijarse cuál es la opción correcta sin haber intentado resolver antes.*

*Dicho esto; ¡Manos a la obra!*

- Se dice que una ecuación vectorial contiene más información que una escalar. Esto ocurre porque (marque la respuesta que considere correcta):
  - Se expresa con más cantidad de decimales. ☐
  - La ecuación vectorial tiene unidades y la escalar no. ☐
  - La ecuación vectorial informa acerca de direcciones y sentidos además de módulos. ☐
  - La ecuación vectorial permite hacer cuentas más completas. ☐
  - La ecuación vectorial nunca da cero. ☐
- Pueden sumarse o restarse dos vectores que tengan diferentes magnitudes para dar una resultante cero? ¿y tres vectores?
  - Nunca. Ninguna suma o resta de dos o tres vectores puede dar cero. ☐
  - Siempre y cuando los vectores sean colineales. ☐
  - Sólo dos vectores colineales. Con tres vectores nunca se obtiene resultante cero. ☐
  - Sólo la suma de tres vectores. Con dos vectores de esas características no se puede obtener resultante cero. ☐
  - Siempre que se sumen tres vectores la resultante será cero. Con dos vectores no se de esas características no puede obtenerse una resultante cero. ☐
- ¿Puede haber algún caso en que la suma de dos vectores  $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$  produzca un resultado donde  $|\vec{A}| > |\vec{B}|$  y  $|\vec{A}| > |\vec{C}|$ ? En el caso de ser posible, plantee un ejemplo gráfico.
  - Sólo cuando el ángulo entre los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es mayor que un recto. ☐
  - Sólo cuando el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es menor o igual que un recto. ☐
  - Sólo cuando el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es de  $180^\circ$ . ☐
  - Sólo cuando el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es de  $60^\circ$ . ☐
  - Sólo cuando el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  es de  $45^\circ$ . ☐
- ¿Qué puede decir de los vectores que cumplen con la condición:  
 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}| + |\vec{B}| = |\vec{C}|$ ?
  - Que son colineales y del mismo sentido. ☐
  - Que son colineales y de sentido contrario. ☐
  - Que forman entre sus direcciones un ángulo recto. ☐
  - Que forman entre sus direcciones un ángulo de  $60^\circ$ . ☐

- e) Siempre se cumple que  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}| + |\vec{B}| = |\vec{C}|$  ☐
5. ¿Y de los que cumplen con  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}| - |\vec{B}| = |\vec{C}|$ ?
- a) Que son colineales y del mismo sentido. ☐
- b) Que son colineales y de sentido contrario. ☐
- c) Que forman entre sus direcciones un ángulo recto. ☐
- d) Que forman entre sus direcciones un ángulo de  $60^\circ$  ☐
- e) Siempre se cumple que  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}| - |\vec{B}| = |\vec{C}|$  ☐
6. ¿Qué puede decir de los vectores que cumplen con la condición:  
 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 = |\vec{C}|^2$ ?
- a) Que son colineales y del mismo sentido. ☐
- b) Que son colineales y de sentido contrario. ☐
- c) Que forman entre sus direcciones un ángulo recto. ☐
- d) Que forman entre sus direcciones un ángulo de  $60^\circ$  ☐
- e) Siempre se cumple que  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$  y  $|\vec{A}| - |\vec{B}| = |\vec{C}|$  ☐
7. Una persona se desplaza 4 m desde la puerta de su casa, y luego otros 3 m. Se sabe que en total se ha desplazado 1 m. Construya un gráfico que muestre la situación. El ángulo entre los vectores desplazamiento entonces es:
- a)  $0^\circ$ . ☐
- b)  $90^\circ$ . ☐
- c)  $180^\circ$ . ☐
- d)  $270^\circ$ . ☐
- e)  $360^\circ$ . ☐
8. Imagine que los lados del triángulo equilátero de la figura representan módulos de vectores; ( $\vec{AB}$  y  $\vec{BA}$ , por ejemplo, son dos vectores de sentido contrario que se pueden tomar con el módulo de  $\vec{AB}$ ). ¿Cuáles de las siguientes proposiciones no es correcta?
- a)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  ☐
- b)  $\vec{BA} - \vec{BC} = \vec{CA}$  ☐
- c)  $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB}$  ☐
- d)  $2 \times \vec{AB} + 2 \times \vec{BC} = 2 \times \vec{AC}$  ☐
- e)  $\vec{CA} - \vec{CB} = \vec{BA}$  ☐



- d) 50,22 km en la dirección  $56^\circ$  NO. ☐
- e) 83,2 km en la dirección  $56^\circ$  NO. ☐

10. Imagine que los segmentos marcados en el paralelogramo de la figura representan vectores ( $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BA}$ , por ejemplo, son dos vectores de sentido contrario que se pueden tomar con el módulo de  $\overrightarrow{AB}$ ) En las igualdades siguientes se representan algunas de las relaciones posibles entre estos vectores; Indique cuál de ellas no es verdadera:

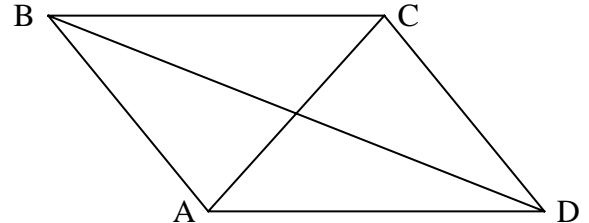
a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

b)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

d)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}$

e)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$



11. Indique cuál de las siguientes afirmaciones no resulta correcta:  
El módulo de la resultante de dos vectores de 20 unidades y 30 unidades:

- a) Nunca puede ser igual a 60 unidades. ☐
- b) Es, con seguridad, menor o igual que 50 unidades. ☐
- c) Nunca es menor que 10 unidades. ☐
- d) Es siempre dada por la expresión:  $\sqrt{20^2 + 30^2}$  ☐
- e) Siempre es positivo. ☐

12. ¿Qué unidades tienen los versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ ?

- a) No tienen unidades. ☐
- b) Se miden en metros. ☐
- c) Se miden en las mismas unidades que la magnitud vectorial que los ha definido. ☐
- d) Se miden en kg. ☐
- e) No pueden tener unidades ya que son vectores de módulo cero. ☐

13. Un vector dado tiene una de sus componentes cartesianas cero; ¿El módulo del vector puede ser cero?

- a) Nunca. ☐
- b) A veces, si se compensa con lo que valgan las otras componentes. ☐
- c) Siempre que una de las componentes sea cero, el módulo del vector será cero. ☐
- d) Sólo si las otras componentes también son cero. ☐
- e) Sólo si la suma de las otras dos componentes es cero. ☐

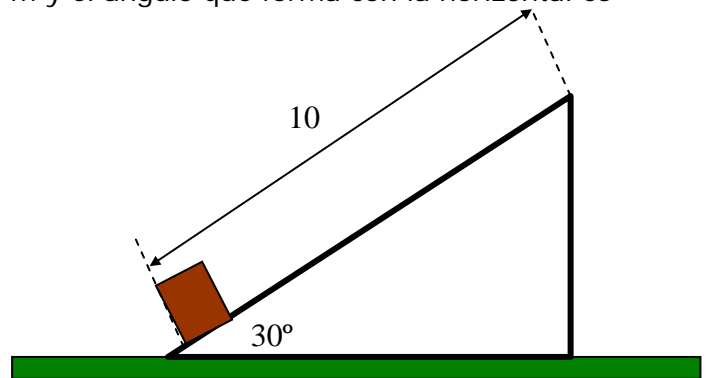
14. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es correcta?



- a) La magnitud de la componente de un vector no puede ser mayor a la del propio vector. ☐
- b) Si la componente de un vector sobre un eje es nula, podemos inferir que la magnitud del vector también lo es. ☐
- c) Si un vector tiene su dirección perpendicular a un eje, entonces la componente del vector sobre ese eje es cero. ☐
- d) Si un vector es paralelo a un eje, entonces la magnitud de la componente del mismo sobre ese eje es igual a la magnitud del vector. ☐
- e) Si ambas componentes rectangulares de un vector son nulas, entonces podemos inferir que la magnitud del vector también lo es. ☐

15. Una carga es desplazada a lo largo de un plano inclinado tal y como muestra la figura. La longitud del plano es de 10 m y el ángulo que forma con la horizontal es de  $30^\circ$ . ¿A qué altura del suelo se levantó la carga?

- a) 8,66 m. ☐
- b) 5 m. ☐
- c) 10 m. ☐
- d) 13,66 m. ☐
- e) Cero. ☐



16. ¿Qué distancia se movió horizontalmente?

- a) 8,66 m. ☐
- b) 5 m. ☐
- c) 10 m. ☐
- d) 13,66 m. ☐
- e) Cero. ☐

17. Expresando el desplazamiento de la carga con un vector definido como la suma de sus componentes cartesianas nos queda:

- a)  $\vec{D} = (8,66\vec{i} + 5\vec{j})m$  ☐
- b)  $\vec{D} = (5\vec{i} + 8,66\vec{j})m$  ☐
- c)  $\vec{D} = (8,66\vec{i} - 5\vec{j})m$  ☐
- d)  $\vec{D} = (10\vec{i} + 5\vec{j})m$  ☐
- e)  $\vec{D} = (0\vec{i} + 0\vec{j})m$  ☐

18. El producto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  de dos vectores:  $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  y  $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  tiene por resultado:

- a) 9. ☐
- b) 12. ☐
- c) 5. ☐
- d) 0. ☐

- e) No se puede resolver porque los vectores no son colineales. ☐
19. El producto escalar entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tiene por resultado  $900 \text{ u}^2$ . Se sabe que el módulo de cada vector es de:  $|\vec{A}| = 30 \text{ u}$  y  $|\vec{B}| = 50 \text{ u}$ . Entonces entre ambos vectores, el ángulo es de:
- a) Aproximadamente  $53^\circ$ . ☐
  - b) Aproximadamente  $37^\circ$ . ☐
  - c) Aproximadamente  $127^\circ$ . ☐
  - d) Aproximadamente  $143^\circ$ . ☐
  - e) Aproximadamente  $0^\circ$ . ☐
20. El producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  tiene por resultado un vector de módulo  $900 \text{ u}^2$ . Se sabe que el módulo de cada vector es de:  $|\vec{A}| = 30 \text{ u}$  y  $|\vec{B}| = 50 \text{ u}$ . Entonces entre ambos vectores, el ángulo es de:
- a) Aproximadamente  $53^\circ$ . ☐
  - b) Aproximadamente  $37^\circ$ . ☐
  - c) Aproximadamente  $127^\circ$ . ☐
  - d) Aproximadamente  $153^\circ$ . ☐
  - e) Aproximadamente  $0^\circ$ . ☐
21. ¿En qué casos es absolutamente imprescindible fijar un sistema de coordenadas antes de resolver?:
- a) Al sumar dos vectores. ☐
  - b) Al restar dos vectores. ☐
  - c) Al hallar su producto escalar. ☐
  - d) Al hallar su producto vectorial. ☐
  - e) Nunca es imprescindible fijar de antemano un sistema de coordenadas. ☐
22. Si le informan que  $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ ; esto implica necesariamente que:
- a) Las direcciones de ambos vectores forman un ángulo de  $90^\circ$  entre sí. ☐
  - b) Las direcciones de ambos vectores forman un ángulo de  $0^\circ$  entre sí. ☐
  - c) Las direcciones de ambos vectores forman un ángulo de  $180^\circ$  entre sí. ☐
  - d) Las direcciones de ambos vectores forman un ángulo de  $45^\circ$  entre sí. ☐
  - e) Nunca puede ocurrir que  $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ . ☐
23. Le informan que  $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet \vec{C}$ ; Esto implica necesariamente que:
- a)  $\vec{B} = \vec{C}$  ☐
  - b)  $\vec{A} = \vec{C}$  ☐
  - c)  $\vec{B} = \vec{A}$  ☐
  - d) Nunca puede cumplirse que  $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet \vec{C}$  ☐
  - e) Independientemente de los valores de los vectores involucrados, siempre se cumplirá que  $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet \vec{C}$ . ☐

24. El producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  de dos vectores:  $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  y  $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  tiene por resultado:

- a)  $\vec{C} = 6\vec{i}$  ☐
- b)  $\vec{C} = -12\vec{k}$  ☐
- c)  $\vec{C} = 6\vec{k}$  ☐
- d)  $\vec{C} = 12\vec{k}$  ☐
- e) Cero. ☐

25. Un vector  $\vec{A}$  tiene una dirección paralela al eje de rotación de la Tierra apuntando hacia el norte, un segundo vector  $\vec{B}$  apunta verticalmente hacia arriba sobre un barco anclado a  $40^\circ$  latitud sur. Entonces, la dirección y sentido del producto vectorial  $\vec{A} \times \vec{B}$  entre ambos es:

- a) En la dirección este – oeste y apuntando hacia el este. ☐
- b) En la dirección este – oeste y apuntando hacia el oeste. ☐
- c) En la dirección norte – sur y apuntando hacia el sur. ☐
- d) En la dirección norte – sur y apuntando hacia el norte. ☐
- e) Hacia los  $40^\circ$  latitud norte. ☐

### ZONA DE RESPUESTAS:

#### (a) RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS INSERTAS EN EL MÓDULO:

Respuesta 1: Una magnitud es vectorial cuando necesita de un vector para ser definida. Podemos definir la temperatura perfectamente dando sólo la cantidad y la unidad utilizada para medirla (Sólo con decir que el agua hierve a presión atmosférica normal a 100 °C, damos toda la información necesaria). La temperatura no posee dirección ni sentido que deba definirse.

Respuesta 2: Sumando los vectores por regla del polígono, vemos que la figura que se forma es un triángulo con sus tres lados iguales, por lo tanto podemos decir que se forma un triángulo equilátero. También podemos dar como característica particular que el ángulo entre los vectores sumados debe ser de 120°.

Respuesta 3: El módulo de los versores es adimensional debido a la misma definición de versor. Si un versor es un vector cuyo módulo resulta de dividir el módulo del vector por sí mismo, la unidad en que se mide el módulo se cancela. Matemáticamente:  $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ , de donde, en unidades, si el módulo del vector se midió en unidades "u", el módulo del versor será:  $|\vec{a}| = \frac{|\vec{a}|u}{|\vec{a}|u}$ , con lo que el módulo de un versor no tiene unidades.

Respuesta 4: Si. Necesariamente el módulo del segundo vector debe ser cero. Para que el producto escalar de cero, o uno de los vectores tiene módulo cero o el ángulo entre vectores es de 90°. Para que el producto vectorial sea cero, o uno de los vectores tiene módulo cero o bien el ángulo entre vectores debe ser de 0°. Para que ambos productos sean cero, obviamente la única posibilidad es que el módulo de uno de ellos sea cero.

#### (b) RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN.

Pregunta n°	respuesta correcta
1	c
2	d
3	b
4	a
5	b
6	c
7	c
8	c
9	b
10	b
11	d
12	a
13	d
14	b
15	b
16	a
17	a
18	c
19	a
20	b
21	d
22	a
23	a
24	d
25	a

## GLOSARIO:

**Vector:** Toda magnitud en la que, además de la cuantía, hay que considerar el punto de aplicación, la dirección y el sentido. Las fuerzas son vectores.

**Módulo:** Longitud del segmento que define un vector.

**Sistemas de coordenadas:** Se dice de las líneas que sirven para determinar la posición de un punto, y de los ejes o planos a que se refieren aquellas líneas. U. m. c. s. f. y en pl.

**Par ordenado:** Par de elementos dados en un cierto orden.

**Ejes cartesianos:** Cada una de las rectas que son paralelas a cada uno de los dos ejes de referencia, trazados sobre un plano, o a alguna de las intersecciones de tres planos, con respecto a los cuales se determina la posición de un punto del espacio por las longitudes de dichas rectas, contadas desde los ejes o planos no paralelos a ellas.

**Cuadrante:** Cuarta parte de la circunferencia o del círculo comprendida entre dos radios perpendiculares.

**Posición:** Magnitud vectorial que sirve para localizar un punto referido a un sistema de coordenadas. El módulo de los vectores posición se mide en unidades de longitud, por ejemplo, en metros.

**Desplazamiento:** Magnitud vectorial definida como la diferencia entre dos posiciones ocupadas por un cuerpo. Matemáticamente se obtiene restando los vectores posición correspondientes, gráfica o analíticamente. El módulo del vector desplazamiento se mide en unidades de longitud.

**Magnitud:** [Del latín: *magnitūdo* ] Propiedad física que puede ser medida; p. ej., la temperatura, el peso, etc. cuando las magnitudes requieren de un vector para ser definidas, se llaman vectoriales; si en cambio sólo con la cantidad y la unidad de medida es suficiente, reciben el nombre de escalares.

**Newton (N) (como unidad de fuerza):** Unidad de fuerza del Sistema Internacional, equivalente a la fuerza que, aplicada a un cuerpo cuya masa es de un kilogramo, le comunica una aceleración de un metro por segundo cada segundo. (Símb. N). Llamada así en honor del físico Isaac Newton. Un Newton equivale a 98 gramos-fuerza.

**Escala:** [Del latín. *scala*, ] Línea recta dividida en partes iguales que representan metros, kilómetros, leguas, etc., y sirve de medida para dibujar proporcionadamente en un mapa o plano las distancias y dimensiones de un terreno, edificio, máquina u otro objeto, y para averiguar sobre el plano las medidas reales de lo dibujado.

**Coplanares:** Que están en un mismo plano.

**Colineales:** Que se encuentran sobre la misma recta.

**Escalar:** Magnitud que resulta definida indicando solamente cantidad y unidad de medida.

**Números Reales (R):** Conjunto numérico que resulta de la unión de los conjuntos que contienen a los números enteros (Z), los racionales (Q) y los irracionales.

**Versor:** Vector de módulo 1.

**Paralelismo:** Cualidad de paralelo o continuada igualdad de distancia entre líneas o planos.

**Perpendicularidad:** Condición que cumplen líneas o planos que se cortan con otras líneas o planos formando un ángulo recto.

**Proyección:** [Del latín: *proiectio*, *-ōnis* ] Figura que resulta, en una superficie, de proyectar en ella todos los puntos de un sólido u otra figura.

**kgf (kilogramo-fuerza):** Fuerza ejercida sobre un cuerpo que posee una masa de un kilogramo, y que lo somete a una aceleración de 9,8 metros sobre segundo al cuadrado. Una fuerza de un kilogramo-fuerza equivale a 9,8 N del Sistema Internacional de Unidades.

**Superficie:** [Del latín: *superficiēs* ] Magnitud que expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones, largo y ancho. Su unidad en el Sistema Internacional es el metro cuadrado (m<sup>2</sup>).

**Área:** [Del latín: *arēa* ] Superficie comprendida dentro de un perímetro.

**Proporcional:** [Del latín: *proportionālis* ] Se dice del nombre o del adjetivo numeral que expresa cuántas veces una cantidad contiene en sí otra inferior; p. ej., doble, triple.

## **BIBLIOGRAFÍA:**

- [1] Reese, Ronald Lane ; "Física Universitaria"; (Editorial Thompson; México D.F.; México; 2002).
- [2] Máximo, Antonio; Alvarenga, Beatriz; "Física General"; (Editorial Oxford; México D.F.; México; 2000).
- [3] Resnick, Robert; Halliday, David; Krane, Kenneth S.; "Física, volumen uno"; (Editorial CECSA; México D.F.; México; 1998).
- [4] Santaló, Luis A.; "Vectores y tensores con sus aplicaciones"; ( Editorial Universitaria de Buenos Aires; Buenos Aires, Argentina, 1985).
- [5] Peña Sainz, A.; Garzo Pérez, F.; "Curso de Física COU"; (Editorial Mc Graw – Hill; España).
- [6] Bedford, Anthony; Fowler, Wallace; "Estática – Mecánica para Ingeniería"; (Editorial Addison – Wesley; Wilmington; U.S.A.; 1996).

## **RECURSOS SOBRE VECTORES EN INTERNET:**

Apuntes y applets sobre vectores:

[http://www.educa.rcanaria.es/fisicayquimica/indiceappletsadaptado\\_NAMO\\_PARA\\_WEB.html](http://www.educa.rcanaria.es/fisicayquimica/indiceappletsadaptado_NAMO_PARA_WEB.html)

Apuntes de vectores y de cinemática vectorial de la Universidad General Sarmiento.

<http://170.210.52.1/ici/fisica/fisica1/index.html>

Simulaciones sobre vectores en internet:

<http://platea.cnice.mecd.es/~anunezca/UnidDidVectores/Index/>

Simulaciones y problemas sobre vectores:

<http://platea.cnice.mecd.es/~anunezca/UnidDidVectores/Index/>

Ejercicios sobre vectores y cinemática de la UBA:

<http://www.df.uba.ar/users/paz/practica0.htm>

Problemas sobre vectores (requiere Acrobat Reader):

<http://www.freewebs.com/odraude/F510141-2003-04-28.pdf>

Teoría y problemas de vectores: <http://www.educa.rcanaria.es/fisica/VECTYCIN.htm>

Apunte sobre vectores (requiere Acrobat Reader):

<http://hugo28946.hypermart.net/upload2/fisvect.pdf>

Teoría y ejercicios sobre vectores: <http://www.escueladeverano.cl/fisica/cinem2d.html>

Teoría y problemas resueltos de vectores:

<http://www.iespana.es/federicomontalvo/VECTORES.htm>

Tutorial con problemas de vectores on line:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/problemas/vectores/vectores.htm>

Tutorial sobre vectores: <http://personal.iddeo.es/romeroa/vectores/index.htm>

Tutorial online sobre vectores: <http://personal.iddeo.es/romeroa/vectores/index.htm>

Vectores aplicados a la cinemática: [http://soko.com.ar/Fisica/Dos\\_dim.htm](http://soko.com.ar/Fisica/Dos_dim.htm)